

به نام خدا



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۰۳-۰۴
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری دوازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. سه جواب دستگاه $\dot{X} = AX$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

مطلوب است مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر آن را برای ماتریس A بیابید.

۲. همه بردارهای X را تعیین کنید بطوریکه جواب‌های مساله مقدار اولیه زیر تابعی تناوبی نسبت به متغیر t باشند.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = X.$$

۳. به فرض $x(t) = e^{\lambda t} v$ جواب دستگاه $\dot{X} = AX$ باشد که در آن λ یک عدد مختلط غیر حقیقی است. ثابت کنید $y(t) = \operatorname{Re}\{x(t)\}$ و $z(t) = \operatorname{Im}\{x(t)\}$ دو جواب مستقل خطی دستگاه هستند.

۴. جواب اساسی دستگاه معادلات زیر را محاسبه کنید.

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} X$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ به فرض } ۵.$$

(الف) نشان دهید $A^2 = -I$.

(ب) با استفاده از قسمت قبل نشان دهید:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

۶. ماتریس A را پیدا کنید اگر

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

۷. به فرض $\phi^j(t)$ جواب مساله مقدار اولیه

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = e^j$$

باشد. نشان دهید $e^{At} = (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n)$.