



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۱۳۹۴-۱۳۹۵
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری یازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. الف) معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = f(t)$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم جواب این معادله دیفرانسیل را به صورت $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$ بنویسیم که در آن:

$$Y(s) = y(0)\Phi(s) + y'(0)\Psi(s) + G(s)$$

است. مطلوبست توابع $\Phi(s)$, $\Psi(s)$ و $G(s)$ را محاسبه کنید. همچنین می‌توانیم با قرار دادن

$$f(t) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

یک جواب همگن $y_h(t)$ به دست بیاوریم و بار دیگر مقادیر

$$f(t) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

را قرار می‌دهیم و جواب دیگری مانند $y_2(t)$ به دست می‌آوریم که نسبت به جواب اول مستقل خطی است. حال یک جواب خاص را با در نظر گرفتن $y(0) = y'(0) = 0$ در فرمول $Y(s)$ به دست می‌آوریم که این جواب خاص برابر $\frac{y_2(t)}{a} * f(t)$ است.

ب) جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از روش قسمت قبل به دست آورید:

$$y'' + 4y' + 4y = 2t, \quad y(0) = 2, y'(0) = -3$$

۲. جواب مساله‌های مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$y'' + 2y' + 3y = \sin(t) + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \text{الف)}$$

$$y'' + y = \delta(t - 2\pi) \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \text{ب)}$$

۳. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y^{(3)} + y - 1 = \int_0^t \sin(t-x)y(x)dx, \quad t > 0$$

$$y(0) = y''(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

۴. الف) نشان دهید اگر $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ ، آنگاه: $\frac{F(s)}{s} = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\theta) d\theta\right)$.
 ب) با استفاده از رابطه به دست آمده لاپلاس وارون $\frac{1}{s(s^2+1)}$ را محاسبه کنید.

۵. الف) فرض کنید عدد ثابتی مانند T داریم که رابطه $f(t+T) = f(t)$ برای تابع f و هر t برقرار است. f را متناوب با دوره تناوب T می‌نامیم. نشان دهید:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

ب) به وسیله قسمت قبل لاپلاس توابع $f(t) = t - [t]$ و $g(t) = |\sin t|$ را محاسبه کنید.

۶. معادله دیفرانسیل زیر را به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید

$$y'' - 3ty' + (1 - t^2)y = \cos(t)$$

۷. دستگاه معادلات دیفرانسیل $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} X$ را در نظر بگیرید.

الف) با حذف یک متغیر یک معادله مرتبه دوم به دست آورید.

ب) معادله مرتبه دوم قسمت قبل را بصورت دستگاه مرتبه اول بنویسید. این همان دستگاه ابتدای سوال نیست اما نشان دهید می‌توان با یک تغییر مختصات به دستگاه اول تبدیل کرد.

۸. ثابت کنید رانسکین دو مجموعه اساسی از جواب‌های دستگاه $X' = P(t)X$ ضربی ثابت از هم هستند.

۹. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید و رفتار جواب را وقتی $t \rightarrow \infty$ تشریح کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۱۰. الف) نشان دهید مقادیر ویژه ماتریس A^n برابر توان n ام مقادیر ویژه ماتریس A است.

ب) نشان دهید ماتریس‌های A و $T^{-1}AT$ دارای چندجمله‌ای مشخصه یکسان هستند.

۱۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} X$$