

به نام خدا



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۰۴-۰۳
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری دهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

۲. الف) به فرض $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ و حد $\frac{f(t)}{t}$ هنگامی که t به صفر می رود موجود باشد. ثابت کنید:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u) du$$

ب) با استفاده از قسمت قبل لاپلاسین $\frac{\cos at - 1}{t}$ را محاسبه کنید.

۳. لاپلاس وارون هر قسمت را محاسبه کنید.

الف) $\frac{s^2 - 5}{s^3 + 4s^2 + 3s}$

ب) $\frac{3s}{(s+1)^4}$

ج) $F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2}$

د) $\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}$

ه) $F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3}$

و) $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$

ز) $\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right)$

ک) $\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$

۴. تبدیل لاپلاس توابع داده شده را محاسبه کنید. سعی کنید در این محاسبه به جای استفاده مستقیم از تعریف، تا جای ممکن توابع را بصورت توابع شناخته شده در جدول لاپلاس تبدیل کنید و سپس تبدیل لاپلاس آنها را محاسبه کنید.

الف)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t^2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f(t) = |\sin(t)|, \quad t \geq 0 \quad (\text{ب})$$

۵. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos t, & \pi \leq t < \infty \end{cases}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

۶. تابع گاما که با $\Gamma(p)$ نمایش داده می شود بصورت انتگرال زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx.$$

الف) نشان دهید این انتگرال برای $p > -1$ همگرا است و در نتیجه تابع گاما برای این مقادیر تعریف شده است.

ب) نشان دهید برای $p > 0$ رابطه $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ برقرار است. همچنین داریم $\Gamma(1) = 1$.

ج) با استفاده از تابع گاما مقدار $\mathcal{L}\{t^p\}$ را برای $p > 0$ محاسبه کنید.

۷. با استفاده از تبدیل لاپلاس و استفاده از رابطه $e^{\ln u} = u$ مقدار k را در معادله زیر بیابید.

$$\int_0^{\infty} t^2 k^{-t} \sin t dt = 0$$