



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۰۴-۰۳
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری هشتم

دانشکده علوم ریاضی

۱. با تغییر متغیر $x = t^2$ جواب معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$ty'' - y' + 4t^2y = t^5 \sin t^2, \quad t > 0$$

۲. الف) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به شکل $t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0$ را معادله اوایلر می‌نامیم. نشان دهید با تغییر متغیر $x = \ln t$ به یک معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت می‌رسیم که معادله مشخصه آن برابر $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$ است. در نتیجه با توجه به تغییر متغیر انجام شده t^x جواب معادله اوایلر است.

ب) فرض کنید $\beta = 4(\alpha - 1)^2$ ، با استفاده از کاهش مرتبه نشان دهید جواب دیگر معادله اوایلر به شکل $(\ln t)t^{\frac{1-\alpha}{2}}$ است.

ج) جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0$$

۳. جواب معادلات اوایلر داده شده در هر قسمت را به دست آورید.

الف)

$$t^2y'' + ty' + y = 0, \quad t > 0$$

ب)

$$(t^2 + 4t + 4)y'' - (2t + 4)y' - 4y = 0$$

۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(2 + t^2)y'' - ty' - 3y = 0$ را به دست آورید.

۵. جواب مساله مقدار اولیه زیر را محاسبه کنید.

$$t(2 - t)y'' - 6(t - 1)y' - 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

۶. معادله $(1 - t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ که در آن α ثابت است، معادله دیفرانسیل لژاندر شناخته می‌شود و در بسیاری از حوزه‌های ریاضی و فیزیک دارای کاربرد است.

الف) دو جواب مستقل خطی معادله لژاندر را بیابید.

ب) نشان دهید اگر در معادله لژاندر قرار دهیم $\alpha = n$ ، آنگاه این معادله دارای جواب چند جمله‌ای درجه n است. این چند جمله‌ای را چندجمله لژاندر مرتبه n گوییم.

۷. الف) دو جواب مستقل خطی معادله زیر را بیابید.

$$y'' + t^3 y' + 3t^2 y = 0.$$

ب) پنج جمله ابتدایی بسط تیلور حول $t = 0$ تابع $y(t)$ را به دست آورید. که در آن $y(t)$ جواب مساله مقدار اولیه زیر است،

$$y'' + t^3 y' + 3t^2 y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$