



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری ششم

دانشکده علوم ریاضی

۱. فرض کنید $p, q : R \rightarrow R$ توابعی پیوسته باشند و $t_0 \in R$. گیریم y_1, y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

باشند بطوریکه $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ و $y_1(t_0) = 0$. ثابت کنید $y_1 = 0$ یا $y_2 = \frac{(y_2)'(t_0)}{(y_1)'(t_0)}y_1$.

۲. این مساله رفتار حدی جواب‌های معادله $ay'' + by' + cy = 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ را بررسی می‌کند.

الف) اگر a, b, c ثابت‌های مثبت باشند. آنگاه همه‌ی جواب‌ها در $t \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کنند.

ب) اگر $a, c > 0$ اما $b = 0$ رفتار جواب در $t \rightarrow \infty$ چگونه است؟

ج) اگر $a, b > 0$ اما داشته باشیم $c = 0$ آنگاه در $t \rightarrow \infty$ جواب‌ها به مقدار ثابتی میل می‌کنند که وابسته به شرایط اولیه است. این ثابت را برای یک شرط اولیه دلخواه به دست آورید.

۳. در مساله مقدار اولیه زیر ابتدا جواب معادله همگن و سپس جواب معادله ناهمگن را با استفاده از روش ضرائب نامعین به دست آورید.

$$y'' + y = t^2(t^2 + 12) + 10 \sin t$$

۴. ابتدا نشان دهید که $y_1(t) = t$ و $y_2(t) = te^t$ جواب‌های همگن معادله زیر هستند. سپس یک جواب خاص این معادله را بیابید.

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 3t^3, \quad t > 0$$

۵. سه جواب معادله خطی مرتبه دوم $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ به صورت زیر می‌باشند.

$$\psi_1(t) = 3e^t + e^{t^2}, \quad \psi_2(t) = 7e^t + e^{t^2}, \quad \psi_3(t) = 5e^t + e^{-t^2} + e^{t^2}.$$

جواب مساله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

۶. فرض کنید یکی از جواب‌های معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ تابع $(1 + t^2)$ باشد و رونسکین هر دو جواب معادله ثابت باشد. جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t$$

۷. جواب معادله دیفرانسیل $y'' + \frac{1}{4t^2}y = 0$ که در آن $t > 0$ و $y_1 = \sqrt{t}$ یک جواب معادله همگن است را بیابید.

۸. جواب معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}y' + \frac{2}{1+t^2}y = 1 + t^2$$