

به نام خدا



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۰۳-۰۴
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاذری

تمرین سری سوم

دانشکده علوم ریاضی

۱. مقادیر α و β را بیابید به نحوی که $\mu = t^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر باشد. سپس جواب معادله را به دست آورید.

$$y(4t + 3y^2) + t(2t + 5y^2) \frac{dy}{dt} = 0$$

۲. ثابت کنید معادله دیفرانسیل زیر، عامل انتگرال سازی به شکل $f(t+y)$ دارد که در آن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر مقدار است. مطلوبست جواب عمومی معادله دیفرانسیل را بعد از ضرب عامل انتگرال ساز به دست آورید.

$$(3ty + y^2) + (3ty + t^2) \frac{dy}{dt} = 0$$

۳. ثابت کنید اگر $\frac{(N_t - M_y)}{(tM - yN)} = R$ ، که در آن R تنها به ty بستگی دارد، معادله دیفرانسیل $M + Ny' = 0$ عامل انتگرال سازی به صورت $\mu(ty)$ دارد. یک فرمول کلی برای این عامل انتگرال ساز بیابید.

۴. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y + t(1 + t^2 y^2) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (y > 0, t > 0)$$

الف) عامل انتگرال سازی به صورت تابعی از ty برای این معادله دیفرانسیل بیابید که آن را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کند.

ب) جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

۵. تمام توابع $f(t)$ را پیدا کنید بطوریکه معادله دیفرانسیل $y^2 \sin t + yf(t) \frac{dy}{dt} = 0$ کامل باشد. سپس معادله را برای هر کدام از این توابع حل کنید.

۶. مساله مقدار اولیه ی

$$y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1$$

را حل کنید و مشخص کنید جواب در چه بازه‌ای معتبر است؟

۷. الف) تحقیق کنید که $y_1(t) = 1 - t$ و $y_2(t) = \frac{-t^2}{4}$ ، هر دو جواب‌های مساله مقدار اولیه‌ی

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad y(2) = -1$$

هستند. هر کدام از این جواب‌ها در چه بازه‌ای معتبر هستند؟

ب) توضیح دهید چرا وجود دو جواب برای مساله‌ی داده شده، یکتایی جواب در قضیه وجود و یگانگی را نقض نمی‌کند.

۸. وجود و یکتایی جواب‌های مساله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$y'(t) = (y(t))^{\frac{4}{5}}, \quad y(0) = 0$$

را بررسی کنید.