



درس معادلات دیفرانسیل
نیم سال دوم ۰۳-۰۴
استاد: دکتر قاجار، دکتر گاوری

تمرین سری دوم

دانشکده علوم ریاضی

۱. جواب مساله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$y' = \frac{y^2 \ln t - y}{t}, \quad (t, y > 0) \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$y' = \frac{t(y+1) + (y+1)^2}{t^2} \quad (t > 0)$$

۳. نشان دهید هر جواب معادله

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-ct}$$

که در آن a و c اعداد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی دلخواهی هستند، در بینهایت به صفر میل می‌کند.

۴. الف) ثابت کنید $\phi(t) = e^{2t}$ جواب معادله $y' - 2y = 0$ است و به ازای هر مقدار ثابت c ، $y = c\phi(t)$ هم جواب این معادله است.

ب) ثابت کنید به ازای $t > 0$ ، $\phi(t) = \frac{1}{t}$ جواب معادله $y' + y^2 = 0$ است. اما $y = c\phi(t)$ جواب این معادله نیست، مگر $c = 1$ یا $c = 0$.

ج) با توجه به دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای در مورد تفاوت دو معادله می‌گیرید؟

۵. معادله ریکاتی $y' = \frac{-1}{t^2} + \frac{-y}{t} + y^2$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $y_1(t) = \frac{1}{t}$ یک جواب معادله است، سپس جواب عمومی تر را بیابید.

۶. الف) نشان دهید معادله‌ی

$$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$$

کامل است، سپس آن را حل کنید.

ب) ابتدا نشان دهید معادله‌ی

$$ydx + (2x - ye^y)dy = 0$$

کامل نیست، اما با ضرب در عامل انتگرال‌ساز $\mu(x, y) = y$ معادله را کامل کرده و آن را حل کنید.

۷. جواب معادلات دیفرانسیل در هر قسمت را به دست آورید

$$\text{الف) } 3ty \frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2$$

$$\text{ب) } (3ty + y^2) + (t^2 + ty) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\text{ج) } \frac{dy}{dt} = \frac{2t+y+4}{t-y-4}$$

$$\text{د) } \frac{dy}{dt} = \frac{y}{4} \cos t + \frac{\sin 2t}{y}$$