

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۱۴۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری سیزدهم
دانشکده علوم ریاضی

صفحه ۹۳۳ آدامز

۱. مقدار انتگرال خطی زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C (\sin x + 3y^2) dx + (2x - e^{-y^2}) dy,$$

که در آن C مرز نیم‌دیسک $x^2 + y^2 \leq a^2$ ، $y \geq 0$ است، و جهت آن پادساعتگرد می‌باشد.

۲. با استفاده از یک انتگرال خطی، مساحت ناحیه‌ای را که توسط منحنی $\vec{r} = a \cos t \hat{i} + b \sin t \hat{j}$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ محصور شده است، بیابید.

صفحه ۹۳۸ آدامز

۳. تمرین‌های ۵ تا ۸. شار میدان برداری $\vec{F} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$ عمود به مرز اجسام زیر و به سمت بیرون، بیابید:

۵. گوی $(x-2)^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9$

۶. بیضی‌گون $x^2 + y^2 + 4(z-1)^2 \leq 4$

۷. چهاروجهی $x + y + z \leq 3$ ، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $z \geq 0$

۸. استوانه $x^2 + y^2 \leq 2y$ ، $0 \leq z \leq 4$

۴. مقدار انتگرال دوگانه زیر را بیابید:

$$\iint_S (3xz^2 \hat{i} - x\hat{j} - y\hat{k}) \cdot \hat{N} dS,$$

که در آن S بخشی از استوانه $y^2 + z^2 = 1$ است که در ربع اول قرار دارد و بین صفحه‌های $x = 0$ و $x = 1$ محدود شده است.

۵. در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۱، فرض کنید D یک ناحیه سه‌بعدی است که شرایط قضیه واگرایی را ارضا می‌کند و S سطح آن است. $\vec{N}$ میدان نرمال یکه خروجی بر S است. توابع φ و ψ میدانهای اسکالر هموار روی D هستند. همچنین مشتق جهت‌دار اول φ در جهت $\vec{N}$ در هر نقطه روی S است، یعنی:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot \vec{N}$$

تمرین ۱۹

نشان دهید:

$$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{N} dS = 0,$$

که در آن $\vec{F}$ یک میدان برداری هموار دلخواه است.

تمرین ۲۰. نشان دهید که حجم V ناحیه D از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{N}) dS,$$

که در آن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار مکان و $\mathbf{N}$ بردار عمود بر سطح S است.

تمرین ۲۱.

اگر حجم ناحیه D برابر V باشد، نشان دهید که

$$\mathbf{r} = \frac{1}{3V} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{N} dS$$

بردار مکان مرکز جرم ناحیه D است.

توجه: سوالات کلا از کتاب آدامز ویرایش نهم طراحی شده است .