

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۱۴۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری دوازدهم
دانشکده علوم ریاضی

صفحه ۹۲۲ آدامز

۱. محاسبه $\text{div } F$ و $\text{curl } F$ برای میدان برداری داده شده را انجام دهید:

a)

$$\vec{F} = xy^2\hat{i} - yz^2\hat{j} + zx^2\hat{k}$$

b)

$$\vec{F}(r, \theta) = r\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

صفحه ۹۲۹ آدامز

۲. اثبات کنید که برای میدانهای اسکالر φ, ψ, f, g و روابط زیر برقرارند:

a)

$$\nabla \times (\varphi \nabla \psi) = -\nabla \times (\psi \nabla \varphi) = \nabla \varphi \times \nabla \psi$$

b)

$$\nabla \cdot (f(\nabla g \times \nabla h)) = \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla h)$$

صفحه ۹۳۳ آدامز

۳. انتگرال خط زیر را در امتداد محیط مثلث با رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ و $(1, 1)$ و در جهت پادساعتگرد محاسبه کنید:

$$\oint_C (x^2 - xy) dx + (xy - y^2) dy$$

۴. برای مسیر

$$C : \vec{r}(t) = \sin t \hat{i} + \sin 2t \hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

مقدار انتگرال خطی زیر را بیابید:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = ye^{x^2}\hat{i} + xe^{y^2}\hat{j}$$

صفحه ۹۳۸ آدامز

۵. با استفاده از قضیه دیورژانس، شار میدان

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + 3yz^2\hat{j} + (3y^2z + x^2)\hat{k}$$

را از کره‌ای به شعاع a (با $a > 0$) محاسبه کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

۶. شار میدان

$$\vec{F} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j} + z^2 \hat{k}$$

را از سطح محدب با شرایط زیر محاسبه کنید:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 3$$

۷. نشان دهید اگر میدان برداری $\vec{F}$ روی ناحیه هموار D تعریف شده باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$\iiint_D \varphi \nabla \cdot \vec{F} dV + \iiint_D \nabla \varphi \cdot \vec{F} dV = \iint_S \varphi \vec{F} \cdot \hat{N} dS$$

صفحه ۹۴۳ آدامز

۸. مقدار انتگرال سطحی زیر را از نیم‌کره‌ی بالا (که نرمال آن به سمت خارج است) محاسبه کنید:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} dS, \quad \vec{F} = 3y \hat{i} - 2xz \hat{j} + (x^2 - y^2) \hat{k}$$

۹. برای خم بسته زیر:

$$\vec{r}(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + \sin 2t \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

مقدار انتگرال خطی زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = (e^x - y^3) \hat{i} + (e^y + x^3) \hat{j} + e^z \hat{k}$$

توجه: سوالات کلا از کتاب آدامز ویرایش نهم طراحی شده است.