

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری دهم
دانشکده علوم ریاضی

صفحه ۸۶۶ آدامز

۱. سؤال ۱۱. فرض کنید D کوچکتر از دو ناحیه صلب محصور بین دو سطح زیر باشد:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2,$$

که در آن a یک ثابت مثبت است. مقدار زیر را بیابید:

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dV.$$

بخش ۱۵.۱ صفحه ۸۷۳

۲. در تمرین‌های ۱ تا ۸، میدان برداری صفحه‌ای داده‌شده را رسم کرده و خطوط میدان آن را مشخص کنید.

۲. $\vec{F}(x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$

۴. $\vec{F}(x, y) = \hat{i} + \sin x \hat{j}$

۶. $\vec{F}(x, y) = \nabla(x^2 - y)$

۸. $\vec{F}(x, y) = \cos y \hat{i} - \cos x \hat{j}$

بخش ۱۵.۲ صفحه ۸۸۲

۳. در تمرین‌های ۱ تا ۶، مشخص کنید که آیا میدان برداری داده‌شده پایستار است و در صورت امکان تابع پتانسیل را بیابید.:

۲. $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$

۳. $\vec{F}(x, y) = \frac{x\hat{i} - y\hat{j}}{x^2 + y^2}$

۴. $\vec{F}(x, y) = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2}$

۶. $\vec{F}(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2} (xz\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k})$

بخش ۱۵.۳ صفحه ۸۸۷

۴. در تمرین‌های ۱ تا ۲، انتگرال خطی داده‌شده را بر روی مسیر مشخص‌شده C محاسبه کنید.:

۱.

$$\int_C (x + y) ds, \quad \text{که } \vec{r} = at\hat{i} + bt\hat{j} + ct\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq m.$$

۵. ۷. گشتاور لختی نسبت به محور z را بیابید (یعنی مقدار

$$\delta \int_C (x^2 + y^2) ds$$

را بیابید) برای سیمی با چگالی ثابت δ که روی منحنی

$$\mathbf{r} = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

قرار دارد.

۶. ۱۵. مقدار

$$\int_C x ds$$

را در قسمت اکتانت اول از منحنی تقاطع استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $z = x$ بیابید.

۷. ۱۸. مقدار

$$\int_C xyz ds$$

را به صورت یک انتگرال معین بیان کنید، ولی آن را محاسبه نکنید. در اینجا C منحنی تعریف شده با معادلات $y = x^2$ و $z = y^2$ است، که از نقطه $(0, 0, 0)$ تا $(2, 4, 16)$ کشیده شده است.

بخش ۱۵.۴ صفحه ۸۹۴

۸. ۵. میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

را در امتداد منحنی از نقطه $(-1, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ ، در هر دو جهت، که منحنی تقاطع استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = y$ است، انتگرال گیری کنید.

۹. ۶. میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z) \mathbf{i} + (y - z) \mathbf{j} - (x + y) \mathbf{k}$$

را در امتداد مسیر چندضلعی از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ انتگرال گیری کنید.

۱۰. ۸. مقدار انتگرال بسته زیر را در جهت پادساعتگرد حول مربعی با رأس های $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ و $(0, 1)$ بیابید:

$$\oint_C x^2 y^2 dx + x^3 y dy$$

۱۱. ۱۱. مقادیر A و B را طوری بیابید که میدان برداری

$$\mathbf{F} = Ax \ln z \mathbf{i} + By^2 z \mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3 \right) \mathbf{k}$$

پیستار باشد. اگر C خط راست از نقطه $(1, 1, 1)$ تا $(2, 1, 2)$ باشد، مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_C 2x \ln z \, dx + 2y^2 z \, dy + y^3 \, dz$$

۱۲. در تمرینات ۱۵ تا ۱۹، انتگرال‌های خطی بسته زیر را محاسبه کنید:

$$(a) \oint_C x \, dy \quad (b) \oint_C y \, dx$$

• ۱۶. بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

• ۱۹. مثلی با رأس‌های $(0, 0)$ ، $(a, 0)$ و $(0, b)$

۱۳. مقدار $\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2}$ را :

• (a) در جهت پادساعتگرد دور دایره‌ای که $x^2 + y^2 = a^2$ است.

• (b) در جهت ساعتگرد دور مربعی با رأس‌های $(-1, -1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(1, 1)$ و $(1, -1)$.

• (c) در جهت پادساعتگرد دور ناحیه‌ای که $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ و $y \geq 0$.

بیابید.

توجه: سوالات این هفته کلاً از کتاب آدامز ویرایش نهم طراحی شده و شمارات پراکنده‌ای که کنار تمرینات هستند دقیقاً مطابق شماره همان تمرین در کتاب است.

توجه: در کلاس حل تمرین فقط سوالاتی که شماره آنها با رنگ قرمز مشخص شده، حل می‌شوند.