

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری نهم
دانشکده علوم ریاضی

۱. مسائل مربوط به سطح: بخش ۱۴.۷ صفحه ۸۶۴ کتاب آدامز

برای محاسبه‌ی مساحت سطوح مشخص شده در تمرین‌های ۱ تا ۹، از انتگرال‌های دوگانه استفاده کنید:

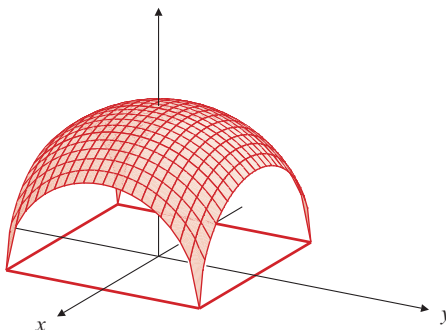
- ۱. بخشی از صفحه‌ی $z = 2x + 2y$ که درون استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد.
- ۳. نیم‌کره‌ی $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
- ۶. سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ در ربع اول فضا (اکتانت اول)
- ۷. بخشی از سطح $z = y^2$ که بالای مثلی با رأس‌های $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$ قرار دارد.
- ۹. بخشی از سطح استوانه‌ای $x^2 + z^2 = 4$ که بالای ناحیه‌ی $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 2$ قرار دارد.

۲. ۱۰. نشان دهید که بخش‌هایی از سطوح $z = 2xy$ و $z = x^2 + y^2$ که درون یک استوانه‌ی عمودی یکسان قرار دارند، دارای مساحت مساوی هستند.

۳. مسأله‌ی ویژه:

۱۲. سایه‌بان نشان داده شده در شکل پایین بخشی از نیم‌کره با شعاع $\sqrt{2}$ است که مرکز آن در مبدأ قرار دارد و بالای مربع $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ قرار گرفته است. مساحت آن را بیابید.

راهنمایی: می‌توان با محاسبه‌ی مساحت بخشی از کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ که بالای صفحه‌ی $z = 1$ قرار دارد، جواب دقیق به دست آورد. اگر مستقیماً با انتگرال‌گیری از عنصر سطح روی مربع، مسئله را حل کنید، ممکن است به یک انتگرال برسید که نتوان آن را دقیقاً حل کرد و باید از روش‌های عددی استفاده کنید.



۴. محاسبه‌ی حجم ناحیه‌ها: بخش ۱۴.۶ صفحه ۸۵۵

در تمرین‌های ۱ تا ۵، حجم ناحیه‌های مشخص شده را بیابید:

- ۱. داخل مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و داخل کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

- ۳. بین سهمی‌وارها: $z = 10 - x^2 - y^2$ و $z = 2(x^2 + y^2 - 1)$
- ۴. داخل سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ و داخل کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 12$
- ۵. بالای صفحه‌ی xy ، داخل مخروط $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ و داخل استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 2ay$

۵. سوال‌های حجمی خاص: بخش ۱۴.۶

۱۰. مقدار انتگرال سه‌گانه را بیابید:

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV,$$

که در آن R استوانه‌ای است با شرایط:

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq h.$$

۱۵. مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$\iiint_R z dV,$$

که در آن ناحیه‌ی R به صورت زیر تعریف شده:

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

۶. معادله لاپلاس در مختصات کروی

۲۰. نشان دهید که معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\cot \phi}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

توجه: سوالات این هفته کلاً از کتاب آدامز ویرایش نهم طراحی شده و شمارات پراکنده‌ای که کنار تمرینات هستند دقیقاً مطابق شماره همان تمرین در کتاب است.

توجه: در کلاس حل تمرین فقط سوالاتی که شماره آنها با رنگ قرمز مشخص شده، حل می‌شوند.