

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۰۴-۰۳
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی
تمرین سری هشتم
دانشکده علوم ریاضی

۱. مشخص کنید که کدام یک از انتگرالهای زیر همگرا و کدام یک واگراست، در صورت همگرا بودن مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

آ. $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|} dA$

ب. $\iint_T \frac{1}{x^3} e^{-y/x} dA$ که در آن ناحیهی T به صورت $0 \leq y \leq x$ و $1 \leq x$

ج. $\iint_Q e^{-xy} dA$ ؛ که در آن Q ربع اول صفحه مختصات دکارتی است.

۲. هر دو ترتیب از انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید:

$$\iint_S \frac{x-y}{(x+y)^3} dA,$$

که در آن S مربعی است به صورت $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$. با محاسبه:

$$\iint_T \frac{x-y}{(x+y)^3} dA,$$

که در آن T بخشی از مربع S است که زیر خط $x = y$ قرار دارد. نشان دهید که این انتگرال دوگانه ناسره وجود ندارد

۳. مقدار انتگرال دوگانه $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dA$ را محاسبه کنید.

۴. مقدار انتگرال $\iint_C y dA$ را که در آن C نیمه بالایی کاردئوید (قلبی شکل) $r \leq 1 + \cos \theta$ است، محاسبه کنید.

۵. مقدار حجم ناحیه واقع بین سهمی وارهای

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad 3z = 4 - x^2 - y^2$$

را بیابید.

۶. توابع گاما و بتا

تابع گاما $\Gamma(x)$ و تابع بتا $B(x, y)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0),$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

نشان دهید خواص زیر برقرار هستند:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

خواص بیشتر این توابع:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds \quad (x > 0) \quad (\text{آ})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (\text{ب})$$

$$B(x, y) = \int_0^{\pi/2} \cos^{x-1} \theta \sin^{y-1} \theta d\theta \quad \text{اگر } x > 0 \text{ و } y > 0 \quad (\text{ج})$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{د})$$

۷. انتگرال‌های سه‌گانه زیر را روی ناحیه‌ی مشخص شده محاسبه کنید.

آ.

$$\iiint_R \sin(\pi y^2) dV$$

روی هرمی با رأس‌های $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)$

ب.

$$\iiint_R y dV$$

روی بخشی از مکعب $1 \leq x, y, z \leq 0$ که بین صفحه‌های $y+z=1$ و $x+y+z=2$ قرار دارد.

۸. انتگرال‌های تکراری داده شده زیر را به صورت یک انتگرال سه‌گانه بیان کنید و ناحیه‌ای را که انتگرال بر روی آن گرفته می‌شود، رسم نمایید. انتگرال را به گونه‌ای بازنویسی کنید که خارجی‌ترین متغیر انتگرال x و متغیر داخلی‌ترین متغیر انتگرال z باشد.

$$\int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^x f(x, y, z) dy \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_0^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx \quad (\text{ب})$$

۹. حجم ناحیه‌ای را بیابید که درون هر سه استوانه دایره‌ای

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$$

قرار دارد. راهنما: طرحی از ناحیه در ربع اول رسم کرده و در صورت امکان از تقارن استفاده کنید.

قابل توجه دستیاران آموزشی: از تمرینهای ۱ و ۶، فقط قسمت (آ) و (ب) و از تمرین ۸ فقط قسمت (آ) در کلاس حل گردند.

رایج ترین تغییر متغیرهای مختصات و ژاکوبی‌ها

۱. مختصات قطبی (دو بعدی)

در مختصات قطبی، تبدیل از مختصات دکارتی (x, y) به مختصات قطبی (r, θ) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \\ \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \\ dA &= r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

۲. مختصات استوانه‌ای (سه بعدی)

در این دستگاه، تبدیل بین مختصات دکارتی (x, y, z) و استوانه‌ای (r, θ, z) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, & z &= z \\ \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \\ dV &= r \, dr \, d\theta \, dz \end{aligned}$$

۳. مختصات کروی (سه بعدی)

در مختصات کروی، تبدیل بین مختصات دکارتی (x, y, z) و کروی (R, ϕ, θ) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \phi \cos \theta, & y &= R \sin \phi \sin \theta, & z &= R \cos \phi \\ \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \phi, \theta)} \right| &= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & R \cos \phi \cos \theta & -R \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & R \cos \phi \sin \theta & R \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -R \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = R^2 \sin \phi \\ dV &= R^2 \sin \phi \, dR \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$