

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۱۴۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین‌های سری پنجم

تمرین ۱. برای تابع تک‌متغیره‌ی مشتق‌پذیر دلخواه f موارد زیر را اثبات کنید.

آ) تابع $z = f(x^2 + y^2)$ ، در رابطه‌ی $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

ب) تابع $z = f(x^2 - y^2)$ ، در رابطه‌ی $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

تمرین ۲ برای تابع $F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ و $F_1(x, y)$ ، $F_2(x, y)$ ، $F_3(x, y)$ ، $F_4(x, y)$ محاسبه کنید.

را در نقطه‌ی $(0, 0) \neq (x, y)$ محاسبه کنید. به علاوه، این مقادیر را در $(0, 0)$ محاسبه کنید و مشاهده کنید که $F_1(0, 0) \neq F_2(0, 0)$. توضیح دهید که چرا این رخداد، قضایای بیان شده در درس را نقض نمی‌کند؟

تمرین ۳ تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تابع در $(0, 0)$ پیوسته نیست. درحالی‌که، $f_1(0, 0)$ و $f_2(0, 0)$ هر دو موجودند.

تمرین ۴ معادلات صفحه مماس و خط عمود بر توابع زیر در نقطه‌ی خواسته شده را به دست آورید.

آ) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ در نقطه‌ی $(1, 1)$.

ب) $f(x, y) = \cos(x/y)$ در نقطه‌ی $(\pi, 4)$.

ج) $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ در نقطه‌ی $(1, -1)$.

تمرین ۵. با ترکیب روابط زیر، متغیر z تابعی از متغیرهای t و u و s می باشد. برای این تابع $\frac{\partial z}{\partial u}$ را با استفاده از قاعده زنجیره ای (نه به دست آوردن رابطه z بر حسب t, u, s) را در نقطه $(t, u, s) = (0, 1, -1)$ به دست آورید.

$$z = xyu + \sin(u + y - 3)$$

$$x = \cos(s + u) + s + y^2$$

$$y = t^2 + u^2 + e^t$$

تمرین ۶. فرض کنید $z = f(x, y)$ اگر $x = s + \frac{1}{t}$ و $y = s + t$ عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ را بر حسب مشتق های z نسبت به متغیرهای s و t به دست آورید.

تمرین ۷. نگاشت $z = z(x, y)$ در رابطه $z^3 - 2xz + y = 0$ صدق می کند که در آن $z(1, 1) = 1$ می باشد. چند جمله ای تیلور مرتبه دوم z در نقطه $(1, 1)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۸. نشان دهید که در همسایگی نقطه $x = 0$ می توان y را به عنوان تابعی از x چنان در نظر گرفت که $y(0) = 0$ و به ازای x های به قدر کافی نزدیک به صفر رابطه $x \sin y(x) = y(x) + \sin x$ برقرار باشد. سه جمله اول مخالف صفر سری تیلور $y(x)$ حول صفر را بیابید.

سوال ۹. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر با این ویژگی باشد که در هر نقطه در $\mathbb{R}^2$ طول بردار گرادیان f برابر با $\sqrt{2}$ است. فرض کنید تابع حقیقی مقدار g روی $\mathbb{R}^2$ توسط رابطه $g(x, y) = f(xy, \frac{1}{4}(x^2 - y^2))$ تعریف شده باشد. اعداد حقیقی a, b را به قسمی بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)^2 = x^2 + y^2$$

سوال ۱۰. نگاشت $z = z(x, y)$ در رابطه $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ صدق می کند. مطلوبست

$$\text{محاسبه } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ بر حسب } x, y, z \text{ و مشتقات } f \text{ در صورتی که } \frac{\partial f}{\partial x} + 2z \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

سوال ۱۱. فرض کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

الف) وجود پیوستگی و مشتقات جزئی را در نقطه مبدا بررسی کرده و در این نقطه گرادیان را محاسبه کنید.

ب) با استفاده از تعریف مشتق جهتی، $D_u f(0, 0)$ را که در آن $u = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$ حساب کنید.

سوال ۱۲. نگاشت $f: R \rightarrow R$ دو بار مشتق پذیر است. مستقیماً تحقیق کنید نگاشت

$$U(x, y, z, t) = \frac{f(r - ct)}{r}$$

در معادله زیر صدق می کند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و $c \in R$ مقدار ثابت است.

توجه: سوالات ۷ و ۸ مربوط به مباحث بعد امتحان میان ترم هستند