

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۱۴۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرینات سری چهارم

تمرین ۱

نمودار (گراف) توابع زیر را رسم کنید.

(آ) $f(x, y) = \sin x$ ($0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2\pi$)

(ب) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ ($y \geq 0, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4$)

(ج) $f(x, y) = |x| + |y|$

(د) $f(x, y) = 6 - x - 2y$

تمرین ۲

سطوح تراز توابع زیر را تشکیل دهید. سپس برخی از این ترازها را رسم کنید.

(آ) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

(ب) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$

(ج) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

(د) $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$

(ه) $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$

تمرین ۳

در صورت وجود، حدهای زیر را محاسبه کنید. در غیر این صورت دلیل عدم وجود حد را بیان کنید.

(آ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{y}$

(ب) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$

(ج) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$

(د) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

تمرین ۴

تحت چه شرایطی بر روی a, b و c ، حد $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{ax^2 + bxy + cy^2}$ موجود است. ادعای خود را اثبات کنید.

تمرین ۵

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} & x \neq y \\ \cos(x) & x = y \end{cases}$$

در چه نقاطی تابع $f(x, y)$ پیوسته می باشد؟

تمرین ۶ آیا می توان تابع $f(x, y) = \frac{\sin x \sin^3 y}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$ را در $(0, 0)$ به گونه ای تعریف کرد که در این نقطه پیوسته شود؟ چگونه؟

تمرین ۷ مشتقات جزئی مرتبه اول تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

را در نقطه $(x, y) = (0, 0)$ محاسبه کنید.

تمرین ۸ مشتق جزئی اول تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

را در نقطه $(0, 0)$ حساب کنید.

سوال ۹ . نگاشت $f: R^2 \rightarrow R$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x - y} & x \neq y \\ e^x & x = y \end{cases}$$

در چه نقاطی تابع $f(x, y)$ مشتق پذیر است و در صورت وجود، آن را محاسبه کنید.