



۱. انتگرال‌های نامعین زیر را حساب کنید.

(الف) $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

(ب) $\int \sqrt{\frac{3+x}{1-x}} dx$

(ج) $\int \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2} dx$

۲. مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر.

(الف) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})^4}$

(ب) $\int_1^{\sqrt{3}} x^{2x^2+1} + \ln(x^{2x^2+1}) dx$

(ج) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\tan^{-1} x}{x^2 - x + 1} dx$

۳. فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد با این ویژگی که $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ ، نشان دهید که $c \in [0, 1]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = c$.

۴. فرض کنید تابع f روی $[0, a]$ انتگرال پذیر باشد. نشان دهید

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx,$$

و سپس با استفاده از این تساوی، $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$ را محاسبه کنید.

۵. فرض کنید نمودار تابع انتگرال پذیر $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نسبت به خط $x = a$ متقارن است. نشان دهید برای هر $b > 0$

$$\int_{a-b}^a f(t) dt = \int_a^{a+b} f(t) dt$$

۶. همگرایی با واگرایی انتگرال‌های ناسره زیر را بررسی کنید.

(الف) $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$

(ب) $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$

(ج) $\int_0^1 \ln(x) dx$

(د) $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

۷. حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})} (1^1 2^2 \dots n^n)^{\frac{1}{n^2}}$$

۸. فرض کنید $a_1 = 0$ و برای $n \geq 1$ $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. نشان دهید دنباله $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ همگراست و حد آن را به دست آورید.

۹. فرض کنید $a_1 \in [0, 6]$ داده شده است و برای $n \geq 1$ $a_{n+1} = \sqrt{6 - a_n}$. نشان دهید دنباله $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ همگراست و حد آن را به دست آورید.

۱۰. (آ) ثابت کنید برای هر $x \geq 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x.$$

(ب) به کمک نامساوی قسمت (الف)، حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2}) (1 + \frac{2}{n^2}) \dots (1 + \frac{n}{n^2}).$$

۱۱. آیا سری $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$ همگراست؟

۱۲. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد.

(آ) اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، ثابت کنید $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ نیز همگراست.

(ب) با ذکر مثال نشان دهید که عکس قسمت (الف) برقرار نیست.

۱۳. به ازای کدام مقادیر حقیقی a ، سری $\sum_{n=1}^\infty (\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n})^a$ همگراست؟

۱۴. فرض کنید $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^\infty a_n$ واگرا باشد. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، ثابت کنید $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{1+a_n^2}$ واگراست. مثالی ارائه دهید که نشان دهید همگرا بودن $\{a_n\}$ به صفر لازم است.

۱۵. فرض کنید $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ همگرا باشد، ثابت کنید $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$ نیز همگراست.

۱۶. شعاع و بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^\infty (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$ را بیابید.

۱۷. دنباله $\{a_n\}$ را به صورت $a_n = \int_0^1 \sin^n x dx$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و سری $\sum_n (-1)^{n+1} a_n$ همگراست.

۱۸. بازه همگرایی و مجموع سری‌های زیر را محاسبه کنید.

$$(آ) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n$$

$$(ب) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}$$

۱۹. مجموع سری‌های عددی زیر را بیابید.

$$(آ) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n}$$

$$(ب) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$$

۲۰. مجموع سری‌های زیر را بیابید.

$$(آ) x^3 - \frac{x^9}{3! \times 4} + \frac{x^{15}}{5! \times 16} - \frac{x^{21}}{7! \times 64} + \frac{x^{27}}{9! \times 256} - \dots$$

$$(ب) 1 + \frac{1}{2 \times 2!} + \frac{1}{4 \times 3!} + \frac{1}{8 \times 4!} + \dots$$

۲۱. هریک از توابع f و g با ضابطه‌های زیر را به یک سری تیلور حول $a = 0$ بسط دهید و در هر حالت شعاع همگرایی را محاسبه کنید. با استفاده از سری‌های به دست آمده، مشتق دهم f و g را در صفر به دست آورید.

$$(آ) f(x) = \frac{x}{x^2+16}$$

$$(ب) g(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

۲۲. با استفاده از آزمون ریشه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ را بیازمایید.

۲۳. بررسی کنید سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$ به ازای چه مقادیری از k همگرا یا واگرا خواهد شد.

۲۴. درمورد هریک از سری‌های زیر تعیین کنید همگرا یا واگراست.

$$(آ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \quad x > 0$$

$$(ب) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

$$(ج) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{n2^n+1}$$

$$(د) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$$

$$(ه) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n+1}{3^n+1}$$

$$(و) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \quad p > 0$$

$$(ز) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$(ح) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$(ط) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$(ی) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$$

$$(ک) \sum_{n=1}^{\infty} nr^n \quad 0 < r < 1$$

$$(J) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(P) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^p} \quad p > 0$$