



۱. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

(ا) $\int a^x dx \quad (a > 0)$

(ب) $\int e^{-\sqrt{x}} dx$

(ج) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \quad (a > 0)$

(د) $\int \tan x dx$

(ه) $\int \sec x dx$

(و) $\int \sec^2 x dx$

(ز) $\int \frac{\sec x}{1 + \tan x} dx$

(ح) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0, |x| < a)$

(ط) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$

(ی) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

(ک) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (a > 0, |x| > a)$

(ل) $\int \sec^3 x dx$

(م) $\int \sin^{-1} x dx$

(ن) $\int x \sin^{-1} x dx$

(س) $\int x \sin x dx$

(ع) $\int e^{ax} \sin bxdx$

(ف) $\int \sinh x dx$

(ص) $\int \operatorname{sech} x dx$

(ق) $\int \sinh^2 x dx$

- (و) $\int \tanh^2 x dx$
 (ش) $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx$
 (ت) $\int \sec x \tan x dx$
 (ث) $\int \ln x dx$
 (خ) $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1)$
 (ذ) $\int x^n e^x dx \quad (n \in \mathbb{N})$
 (ض) $\int \sin^2 x dx$
 (ظ) $\int \sin^n x dx$
 (غ) $\int \sin^n x \cos^m x dx \quad (n, m \in \mathbb{N})$

۲. سری‌های زیر را محاسبه کنید.

- (ا) $\sum_{k=0}^n \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
 (ب) $\sum_{k=0}^n \frac{kn}{(n+k)^2}$
 (ج) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n+k}$

۳. می‌دانیم برای خم $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ در صفحه، طول خم $\gamma(t)$ برای $t \in [a, b]$ برابر است با $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ که در آن $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$. با استفاده از معادله دایره $x^2 + y^2 = 1$ نشان دهید برای $\theta \in [0, \pi]$ داریم $\sin \theta \leq \theta$ که در آن θ بیانگر طول آن قسمت از دایره است که از $(0, 0)$ تا $(x, \sqrt{1-x^2})$ حرکت می‌کند (قوس)، به عبارت دیگر

$$\sqrt{1-u^2} \leq \int_u^1 \sqrt{1+y'^2} dx.$$

۴. الف) مساحت قطاع θ در دایره به شعاع ۱ را حساب کنید و ارتباط آن با طول قوس را بیابید.

ب) با کمک انتگرال، محیط و مساحت دایره را بیابید.

ج) با توجه ارتباط مساحت قطاع و طول قوس در دایره، نشان دهید برای $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ داریم $\theta \leq \tan \theta$.

۵. با تغییر متغیری مناسب، انتگرالهای زیر را به انتگرال توابع گویا تبدیل کرده و سپس انتگرال‌گیری خود را کامل کنید.

- (ا) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x+1}} dx$
 (ب) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x} dx$
 (ج) $\int \sqrt{\tan x} dx$

۶. با استفاده از انتگرال ثابت کنید

(ا) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = 1$

۷. تابع $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

(سعی نکنید انتگرال را محاسبه کنید.)

الف) مشتق‌های اول و دوم F را محاسبه کنید و نمودار F را رسم کنید.

ب) قرار می‌دهیم $E = F(1)$. نشان دهید $\sqrt[4]{e} < E < \frac{1+e}{2}$.

ج) نشان دهید $F^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یا همان وارون F وجود دارد و مشتق‌پذیر است و $(F^{-1})'(E)$ را محاسبه کنید.

۸. گاهی تقریب $\frac{22}{7}$ برای عدد π منظور می‌شود. این تقریب بزرگ‌تر از مقدار واقعی π است. ثابت کنید

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

۹. برای $a > 0$ و $b > 0$ داده شده نشان دهید $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

۱۰. تابع مشتق‌پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ همه جا مشتق منفی دارد و $f(0) = 1$. اگر وارون f را با f^{-1} نمایش دهیم، مشتق وارون f به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{-x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 + 3}.$$

انتگرال $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$ را حساب کنید.

۱۱. ناحیه بین $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3$ و خط راست $x+y=3$ را رسم کنید و با انتگرال‌گیری نسبت به محور مناسب (که ممکن است هیچ یک از محوره‌های x و y نباشد) مساحت ناحیه مورد نظر را پیدا کنید.

۱۲. الف) بدون آنکه تابع اولیه $\sin^{-1} x$ را حساب کنید ثابت کنید $\int_0^1 \sin^{-1} x dx = \frac{\pi}{2} - 1$ (راهنمایی: به نمودار $\sin t$ روی $[0, \frac{\pi}{2}]$ نگاه کنید).

ب) با استفاده از راهنمایی قسمت (الف) تابع اولیه‌ای برای $\sin^{-1} x$ پیدا کنید.

۱۳. عدد مثبت a را طوری تعیین کنید که انتگرال زیر بیشترین مقدار ممکن باشد:

$$\int_{-a}^a \frac{-t^2 + 2t + 3}{t^6 + 1} dt.$$

۱۴. تابع چندجمله‌ای $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر K به اندازه کافی بزرگ باشد، میانگین $p(x)$ روی $[0, K]$ مثبت است.

یادآوری: میانگین تابع $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ روی بازه (a, b) را مقدار $\int_a^b f(t) dt / (b-a)$ تعریف می‌کنیم.

۱۵. برای تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^m x}$ روی دامنه $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)، که در آن m عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ است، کلی‌ترین تابع اولیه را توصیف کنید.

۱۶. الف) فرض کنید $c_1, \dots, c_k$ نقاطی متمایز در بازه $[a, b]$ باشند و $C_1, \dots, C_k$ اعدادی حقیقی و دلخواه. تابع

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ را به صورت}$$

$$g(x) = \begin{cases} C_i & x = c_i, \quad i = 1, \dots, k \\ 0 & x \notin \{c_1, \dots, c_k\} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید g انتگرال‌پذیر است و $\int_a^b g = 0$.

۱۷. برای هریک از توابع زیر تابع اولیه‌ای پیدا کنید.

(ا) $f(x) = x(1+x)^\alpha \quad x > -1, \alpha \in \mathbb{Q}$

(ب) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}} dx \quad x > 0$

(ج) $\frac{2x^2+1}{x^3-1} \quad x \neq 1$

(د) $\frac{x^2+1}{x^4+x^3} \quad x \neq 0, -1$

(ه) $\frac{x^2-1}{2x\sqrt{x(x^2+x+1)}}$