



۱. مطلوبست محاسبه حدود زیر را محاسبه کنید. میتوانید از قاعده هوییتال استفاده کنید.

(ا) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sinh x}{x^3}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$

(د) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}$

(ه) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1)$

۲. تابلویی به ارتفاع یک متر، در ارتفاع دومتری از سطح زمین قرار دارد. اگر بخواهیم با دوربینی در سطح زمین این تابلو را مشاهده کنیم، باید در چه فاصله ای از دیوار محل نصب تابلو قرار بگیریم تا بیشترین زاویه دید را نسبت به تابلو داشته باشیم؟

۳. یک مخزن مخروطی شکل وارونه به ارتفاع ۱۲ سانتی متر و شعاع قاعده ۳ سانتی متر مفروض است. فرض کنید این مخروط پر از آب است و سرعت خروجی آب از راس آن بر حسب سانتی متر مکعب در ثانیه، برابر ارتفاع آب بر حسب سانتی متر است. پس از چندثانیه آب مخزن کاملاً تخلیه می‌شود؟

۴. شخصی بادبادکی در دست دارد و بادبادک درست بالای سر شخص در ارتفاع ۱۰۰ متری او قرار دارد. بادبادک به صورت افقی با سرعت ۸ متر در ثانیه در حال حرکت است. نرخ کاهش زاویه نخ با افق را وقتی طول نخ ۲۰۰ متر می‌شود به دست آورید. (مکان شخصی که بادبادک را در دست دارد و ارتفاع بادبادک ثابت است.)

۵. حجم یک بادکنک کره‌ای شکل با آهنگ ۱ سانتی متر مکعب در ثانیه زیاد می‌شود. تعیین کنید آهنگ افزایش شعاع آن چقدر است؟

۶. مکعبی به ضلع ۱ متر، پر از آب است و کف آن سوراخی وجود دارد که از طریق آن، آب درون استوانه‌ای به شعاع ۱ متر می‌ریزد. اگر آهنگ پایین آمدن سطح آب $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ باشد، آنگاه نرخ اضافه شدن ارتفاع آب در استوانه چقدر است؟

۷. دوزنقه‌ای در نیم دایره‌ای به شعاع ۲ محاط است به طوری که قاعده دوزنقه روی قطر نیم دایره قرار دارد. ماکزیم مساحت دوزنقه را بیابید.

۸. طول بلندترین تیری را بیابید که بتواند به طور افقی از پیچ یک راهرو با عرض a متر به راهرویی با عرض b متر حمل شود.

۹. منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ را در نظر بگیرید. از نقطه دلخواه (x_0, y_0) روی این منحنی، مماسی بر این منحنی رسم می‌کنیم تا محورهای x و y را در نقاط $(a, 0)$ و $(0, b)$ قطع کند. نشان دهید $a + b$ برای تمام نقاط (x_0, y_0) یکسان است.

۱۰. نشان دهید برای تابع پیوسته $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ اگر f' روی $(-a, 0) \cup (0, a)$ موجود باشد و نیز $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ آنگاه f در نقطه a نیز مشتق پذیر است و $f'(a) = l$. این گزاره را برای وقتی که $l = \infty$ باشد صورتبندی و ثابت کنید.

۱۱. مطلوبست یافتن نقاط با کمترین فاصله از مبدا روی نمودار تابع ضمنی $x^2 + xy + y^2 = 1$.

۱۲. مطلوبست یافتن نقاط با بیشترین فاصله از مبدا روی نمودار تابع ضمنی $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

۱۳. مطلوبست یافتن نقاط با بیشترین و کمترین فاصله از مبدا روی نمودار تابع ضمنی $y^2 = x^2(1 - x^2)$.

۱۴. مطلوبست یافتن نقاط با بیشترین و کمترین فاصله از مبدا روی نمودار تابع ضمنی ذیل.

$$(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} - x$$

۱۵. مطلوبست یافتن نقاط با بیشترین و کمترین فاصله از مبدا روی نمودار تابع ضمنی $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$.

۱۶. شکل تقریبی تابع ضمنی $x^3 - y^3 + x = 0$ را رسم کنید.

۱۷. تابع مشتق پذیر g روی بازه (a, b) داده شده است.

(الف) نشان دهید شرط $g' > 0$ صعودی اکید بودن g نتیجه میدهد.

(ب) نشان دهید شرط $g' \geq 0$ صعودی بودن g نتیجه میدهد.

(ج) نشان دهید صعودی اکید بودن g شرط $g' \geq 0$ را نتیجه میدهد.

(د) مثالی ارائه کنید که g صعودی اکید است ولی شرط $g' > 0$ همیشه درست نیست.

۱۸. بنا بر تعریف، تابع $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ با شرط $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ را محدب گوئیم هرگاه

$$\forall \lambda \in [0, 1], x, y \in (a, b) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

و آن را محدب اکید گوئیم هرگاه در نامساوی بالا برای $x \neq y$ تساوی رخ ندهد. همچنین f را به ترتیب مقعر یا مقعر اکید گوئیم هرگاه $-f$ به ترتیب محدب یا محدب اکید باشد.

(الف) نشان دهید هر تابع محدب اکید به روشنی محدب است ولی با یک مثال نشان دهید که هر تابع محدب، لزوماً محدب اکید نیست. همچنین نشان دهید اگر g به ترتیب صعودی یا صعودی اکید باشد و f نیز به ترتیب محدب یا محدب اکید باشد، $g \circ f$ به ترتیب محدب یا محدب اکید است.

(ب) نشان دهید برای برای تابع محدب f مذکور در سوال داریم

$$\forall a < s < t < u < b \quad \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}.$$

همچنین نشان دهید نامساوی های گزاره بالا برای توابع محدب اکید، فاقد برابری است.

(ج) نشان دهید هر تابع محدب پیوسته است. (می توانید از قسمت قبل استفاده کنید.)

(د) نشان دهید اگر تابع f محدب (اکید) و مشتق پذیر باشد، آنگاه f' صعودی (اکید) است.

(ه) نشان دهید اگر برای تابع مشتق پذیر f ، f' صعودی اکید باشد، آنگاه f محدب اکید است.

(و) نشان دهید اگر f دوبار مشتق پذیر باشد، شرط $f'' > 0$ ، محدب اکید بودن f و شرط $f'' \geq 0$ ، محدب بودن f را نتیجه میدهد.

(ز) تمام آنچه گذشت را برای توابع مقعر و مقعر اکید، صورت بندی (و اثبات) کنید.

۱۹. بنا بر تعریف گوییم تابع g در نقطه a تغییر علامت میدهد، اگر

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta), y \in (a - \delta, a) \quad g(x) > (<) 0 \quad g(y) < (>) 0$$

آیا تابعی مشتق پذیر تا دو مرتبه مانند f وجود دارد که در سمت راست مبدا، بالای خط $y = f'(0)x + f(0)$ و در سمت چپ مبدا پایین این خط باشد، ولی مشتق دوم در مبدا تغییر علامت ندهد؟ اگر بلی مثالی ارائه کنید و اگر خیر برهانی بیاورید.

۲۰. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتق پیوسته باشد و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) + f'(x) \leq 1$ و نیز $f(0) = 0$. بزرگترین مقدار ممکن برای $f(1)$ چیست؟

۲۱. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که روی $(0, 1)$ دوبار مشتق پذیر است و $f'' + 2f' + f \geq 0$. اگر $f(0) = f(1) = 0$ ، نشان دهید برای هر $x \in [0, 1]$ ، $f(x) \leq 0$.

۲۲. فرض کنید $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد و $f(0) = 0$. اگر f' نزولی باشد، ثابت کنید $\frac{f(x)}{x}$ نیز برای هر $x \in (0, \infty)$ نزولی است.

۲۳. ثابت کنید معادله $\cos(\sin(x)) = x$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

۲۴. فرض کنید f در $[0, 1]$ پیوسته و در $(0, 1)$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید $c \in (0, 1)$ وجود دارد به طوری که

$$c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1).$$

۲۵. ثابت کنید اگر $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و ناصفر و روی $(0, 1)$ مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $f(0) = 1$ و $f(1) = 2$ ، آنگاه معادله $f(x)^2 - 2f'(x) = 0$ در بازه $(0, 1)$ دارای ریشه است.

۲۶. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر با مشتق پیوسته باشد. فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b$. ثابت کنید یا مثال نقضی بیاورید برای اینکه b باید صفر باشد.

۲۷. فرض کنید $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و روی $(0, 2)$ مشتق پذیر باشد و $f(0) = f(2) = 0$ و $c \in (0, 2)$ وجود داشته باشد که $f(c) = 1$. ثابت کنید $a \in (0, 2)$ وجود دارد به طوری که $|f'(a)| > 1$.

۲۸. ابتدا دسته پاره خطهای $l(t)$ به طول a با پارامتر $t \in [0, 1]$ معرفی کنید که $l(0)$ برابر پاره خط $\{(x, 0) \mid x \in [0, a]\}$ و $l(1)$ برابر پاره خط $\{(0, y) \mid y \in [0, a]\}$ باشد و برای تمام $t \in (0, 1)$ یک سر پاره خط بر قسمت مثبت محور x -ها و سر دیگر پاره خط بر قسمت مثبت محور y -ها باشد. سپس معادله خمی را بیابید که این دسته پاره خط ها با حرکت کردن روی $t \in [0, 1]$ در ربع اول صفحه، سطح زیر آن و محدود به محورها را جارو میکنند.

۲۹. تابع پیوسته $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ که در آن $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ با ویژگی زیر داده شده است. نشان دهید f باید محدب باشد.

$$\forall x, y \in (a, b) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$