



۱. فرض کنید $x(t)$ بیانگر مکان ذره ای روی خط حقیقی باشد و $v(t)$ و $a(t)$ به ترتیب سرعت و شتاب این ذره باشند. اگر $V(x)$ بیانگر مقدار سرعت در مکان x باشد، $\frac{d}{dx}V(x)$ را برحسب داده های مساله محاسبه کنید.

۲. برای توابع مشتقپذیر $f_1, \dots, f_n$ نشان دهید

$$\frac{d}{dx}(f_1(x) \dots f_n(x)) = f_1'(x) \dots f_n(x) + \dots + f_1(x) \dots f_{k-1}'(x) \dots f_n(x) + \dots + f_1(x) \dots f_n'(x)$$

۳. برای توابع مشتق پذیر f, g ثابت کنید

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

یادآوری: منظور از $\frac{d^n}{dx^n}F(x)$ و $F^{(n)}(x)$ همان مشتق مرتبه n -ام تابع F است.

۴. برای چندجمله ای از درجه k -ام $p_k(x)$ ، فرم کلی مشتق n -ام توابع با ضابطه $f(x) = p_k(x)e^x$ و $g(x) = p_k(x)e^{x^2}$ را بیابید.

۵. برای مقادیر مختلف a, c پیوستگی، مشتق پذیری و پیوستگی مشتق تابع زیر را بررسی کنید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^c) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

۶. بزرگترین دامنه ای که $g(x) = \cos^{-1}(1 - x^2)$ میتواند اختیار کند را بیابید. سپس مشتق پذیری تابع مذکور را در همه نقاط دامنه بررسی کنید. یادآوری:

$$y = \cos^{-1}(x) \iff x = \cos(y), y \in [0, \pi]$$

۷. برای تابع مشتق پذیر و نه لزوماً با مشتق پیوسته $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ نشان دهید که اگر $f'(a) < 0$ و $f'(b) > 0$ آنگاه c بین a و b وجود دارد که $f'(c) = 0$.

۸. برای تابع مشتق پذیر f روی بازه ای مانند (α, β) ثابت کنید که f' هر مقداری بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را میگیرد که در آن $a, b \in (\alpha, \beta)$ دلخواه هستند.

۹. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با خاصیت زیر باشد

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) \quad f(\circ) \neq -1$$

نشان دهید که اگر این تابع در صفر مشتق پذیر باشد، آنگاه همه جا مشتق پذیر است.

۱۰. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت های زیر باشد

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + xg(x), \quad \lim_{x \rightarrow \circ} g(x) = \lambda \in \mathbb{R}$$

نشان دهید f همه جا مشتق پذیر است و علاوه بر آن $f' = \lambda f$.

۱۱. تمام توابع g با خاصیت زیر را بیابید.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \quad g' \left(\frac{x+y}{2} \right) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$$

۱۲. تمام توابع با ویژگی زیر را بیابید.

$$\begin{cases} f' = g, f(\circ) = \circ \\ g' = -f, g(\circ) = 1 \end{cases}$$

۱۳. برای یک $\alpha > \circ$ فرض کنید تابع $f: (a - \alpha, a + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ در $\{a\} - (a - \alpha, a + \alpha)$ مشتق پذیر و در نقطه a پیوسته است و $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$. نشان دهید f در نقطه a نیز مشتق پذیر است و $f'(a) = l$.

۱۴. تابع مشتق پذیر $f: [\circ, 1] \rightarrow [\circ, 1]$ با خاصیت $f(1) = 1$, $f(\circ) = \circ$ مفروض است.

الف) نشان دهید

$$\exists x_1, x_2 \in (\circ, 1) \quad \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$$

ب) اگر f صعودی اکید باشد نشان دهید

$$\exists x_1, \dots, x_n \in (\circ, 1) \quad \frac{1}{f'(x_1)} + \dots + \frac{1}{f'(x_n)} = n$$

۱۵. فرض کنید $f: [\circ, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر و $f(\circ) = \circ$ و برای $x \in (\circ, 1)$ داشته باشیم $f(x) > \circ$. نشان دهید

$c \in (\circ, 1)$ وجود دارد که

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

۱۶. فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشند و برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ ، نشان دهید بین هر دو ریشه متوالی f ، یک و تنها یک ریشه g وجود دارد.

۱۷. فرض کنید $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و روی $(0, 1)$ مشتق پذیر باشد و $f(0) = f(1) = 0$ ، نشان دهید $c \in (0, 1)$ وجود دارد که $f'(c) = f(c)$

۱۸. نشان دهید اگر تابع f مشتق پذیر و صعودی اکید (نزولی اکید) باشد، مشتق نمیتواند هیچ جا منفی (مثبت) شود. سپس مثالی بزنید که با فرض سوال، مشتق بتواند در نقاطی صفر نیز باشد.

۱۹. اگر مشتق پیوسته باشد و در نقطه ای نیز مقدار مثبتی بگیرد، آیا میتوان نتیجه گرفت که تابع در یک همسایگی آن نقطه صعودی اکید است؟ اگر بلی چرا و اگر خیر مثال نقضی ارائه کنید.

۲۰. اگر مشتق در نقطه ای مثبت بود، آیا میتوان نتیجه گرفت که تابع در یک همسایگی آن نقطه صعودی اکید است؟ اگر بلی چرا و اگر خیر مثال نقضی ارائه کنید. (توجه کنید که مشتق لزوماً پیوسته نیست)

۲۱. فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ بینهایت بار مشتق پذیر است. نشان دهید $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $f''(c) = 0$.

۲۲. فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و

$$\exists K > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) = 0$$

ثابت کنید f همه جا مشتق پذیر است و تمام توابع با این خاصیت را بیابید.