به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی یک نیمسال ۱۴۰۳۲ **تمرین سری دوم**

---

۱. حدود زیر را محاسبه کنید.

(آ) $\lim_{x\to+\infty}\cos(\sqrt{x+1})-\cos(\sqrt{x})$

(ب) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}$

(ج) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x+1}-\sqrt[n]{x}\quad (n\in\mathbb{Z})$

(د) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}\quad (n\in\mathbb{N}, a>0)$

(ه) $\lim_{x\to a}\frac{x^q-a^q}{x-a}\quad q\in\mathbb{Q}\,,\ a>0$

۲. برای تابع با ضابطه $f(x)=x\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ می خواهیم $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ را طوری پیدا کنیم که برای خط به معادله $l(x)=\alpha x+\beta$ داشته باشیم $\lim_{x\to+\infty}f(x)-l(x)=0$. این خط را مجانب تابع f گویند. آیا این روش محاسبه صحیح است که بگوییم تابع زیر رادیکال در بینهایت به یک میل میکند، پس خط مورد نظرمان همان $l(x)=x$ است؟ چرا؟ توضیح دهید.

۳. برای $\alpha\in(0,1)$ ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty}(1+\alpha^x)^{\frac{1}{x}}=1$.

۴. با فرض $0<a<b$ و $0<a_1<\cdots<a_k$ حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}\quad,\quad\lim_{x\to+\infty}(a_1^x+\cdots+a_k^x)^{\frac{1}{x}}$$

۵. بنا بر تعریف داریم

$$a\in\{1,\dots,9\}\quad\Longrightarrow\quad 0/\bar{a}:=\lim_{n\to+\infty}0/\underbrace{a\dots a}_{n\ \text{دفعه}}$$

توجه داشته باشید که

$$0/\underbrace{a\dots a}_{n\ \text{دفعه}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{10^n}$$

و منظور از $[x]$ همان جز صحیح عدد حقیقی x است. با توجه به این تعاریف، مطلوبست محاسبه مقدار $[0/\bar{9}]$.

۶. قرار دهید $x = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$. سپس مشاهده کنید که $2x = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$. در گام بعدی با ساده کردن جمله به جمله ببینید که $x = 2x - x = -1$. آیا محاسباتی که گذشت صحیح است؟ چرا؟ توضیح دهید.

۷. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $x_1, \dots, x_n$ نقاطی در فاصله $[a, b]$ باشند. نشان دهید $c \in [a, b]$ وجود دارد که

$$\frac{1}{2}n(n+1)f(c) = f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + nf(x_n).$$

۸. اعداد $a_1, \dots, a_n$ را به دلخواه از بازه $[0, 1]$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید عددی مانند c در بازه‌ی $[0, 1]$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{|c - a_1| + \dots + |c - a_n|}{n} = \frac{1}{2}.$$

۹. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $a \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $f(f(a)) = a$. ثابت کنید $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $f(c) = c$.

۱۰. برای هر کدام از موارد زیر مثالی ارائه کنید یا ثابت کنید چنین تابعی وجود ندارد.

الف) تابع پیوسته و یک به یک و پوشا $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

ب) تابع پیوسته و پوشا $f : [a, b) \to \mathbb{R}$

ج) تابعی پیوسته و یک به یک و پوشا $f : [a, b) \to \mathbb{R}$

د) تابعی پیوسته و یک به یک و پوشا $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

۱۱. تمام توابع پیوسته $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با خاصیت زیر بیابید.

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad g(x + y) = g(x)g(y)$$

۱۲. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته است و به ازای هر x و y در رابطه‌ی $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$ صدق می‌کند. نشان دهید $f(x) = [f(1)]^{x^2}$.

۱۳. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای باشد که به ازای هر x، $f(2x^2 - 1) = 2xf(x)$. نشان دهید به ازای هر x در $[-1, 1]$، $f(x) = 0$.

۱۴. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)) = af(x) + bx,$$

که در آن a و b اعداد حقیقی ثابتی در بازه‌ی $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هستند. نشان دهید $f(0) = 0$.