

ریاضی مهندسی

مسائل کلاس تمرین (هفته ی نهم)

نیمسال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

۱. آ- انتگرال فوریه تابع $f(x) = e^{-|x|} \sin 2x$ را به دست بیاورید.

ب- با استفاده از انتگرال فوریه، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \pi e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

پ- انتگرال فوریه کسینوسی تابع زیر که در بازه ی $(0, \infty)$ تعریف شده است را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ت- انتگرال فوریه سینوسی تابع $e^{-x} \cos x$ که در بازه ی $(0, \infty)$ تعریف شده است را بیابید.

۲. با استفاده از انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی، درستی تساوی های زیر را نشان دهید.
آ-

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega^3 \sin \omega x}{\omega^4 + 4} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos x$$

ب-

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

۳. تبدیل فوریه تابع های زیر را به دست آورید.

پ- $\sin x^2$

آ- $e^{-ax^2} (a > 0)$

ت- $\cos x^2$

ب- $\frac{1}{|x|}$

۴. تبدیل فوریه کسینوسی و سینوسی تابع f با ضابطه ی

$$f(x) = xe^{-ax}, \quad a > 0, \quad x > 0$$

را به دست بیاورید.

۵. جواب عمومی مساله های زیر را به دست بیاورید.

آ-

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xy u_x + y^2 u_y = 0$$

ب-

$$y u_{xx} - y u_{yy} - 2u_y = x^2 + y^2$$

۶. جواب مساله زیر را به دست بیاورید.

$$\begin{cases} xy^3u_{xx} - x^3yu_{yy} - y^3u_x + x^3u_y = x^4 - y^4 \\ \text{به ازای } 0 \leq x \leq 2 \text{ روی } u(x, y) = \sin \pi x, y^2 - x^2 = 8 \\ \text{به ازای } 2 \leq x \leq 4 \text{ روی } u(x, y) = e^{x-2} - 1, y^2 + x^2 = 16 \end{cases}$$