

ریاضی مهندسی

مسائل کلاس تمرین (هفته‌ی ششم)

نیمسال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

۱. مانده‌های هر یک از تابع‌های زیر را در هر یک از نقطه‌های تکین منفرد آن به دست آورید:

الف- $f(z) = \frac{\sin z}{(z-i)(z+2)^2}$	ج- $f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}$
ب- $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$	چ- $f(z) = \frac{\log z + 1}{z^2}$
پ- $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$	خ- $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 + z + 1)(z - 1)^2}$
ت- $f(z) = \cot z$	د- $f(z) = z \cos z^{-1}$

۲. انتگرال‌های مختلط زیر را محاسبه کنید:

الف- $\int_{ z =\frac{1}{2}} \frac{\cot z}{1+z+\dots+z^n} dz$	پ- $\int_{ z =n\pi} \tan z dz$
ب- $\int_{ z =\frac{5}{2}} e^{z^2} \cot \pi z dz$	ت- $\int_{ z =\frac{5}{2}\pi} \cot z dz$

۳. فرض کنید C_R مرز میدان $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg} z < \frac{\pi}{n}, |z| < R\}$ باشد. با استفاده از $\int_{C_R} \frac{1}{1+z^{2n}}$ مقدار انتگرال

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx$$

را محاسبه کنید.

۴. می‌دانیم $\int_0^\infty e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. فرض کنید C_n مستطیل با رئوس‌های $0, n, n+ia, ia$ باشد. با استفاده از $\int_{C_n} e^{-z^2} dz = 0$ ، نشان دهید:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx = e^{-a^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$