

ریاضی مهندسی

مسائل کلاس تمرین (هفته‌ی چهارم)

نیمسال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

۱. انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

ت- $\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ و $(n \in \mathbb{Z})$

الف- $\int_1^1 z e^{z^2} dz$

ج- $\int_C \frac{z}{z} dz$ که C مرز میدان

ب- $\int_{-i}^i z \cosh z^2 dz$

$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ است.

پ- $\int_{|z-i|=2} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz$

۲. الف- فرض کنید f تابعی تام باشد و به‌ازای عددی طبیعی مانند n و $|z|$ به اندازه‌ی کافی بزرگ، $|f(z)| < |z|^n$. نشان دهید f چندجمله‌ای است.

ب- فرض کنید f روی $|z| < 1$ تحلیلی باشد و به‌ازای هر z که $|z| < 1$ ، $|f(z)| \leq 1$. نشان دهید $|f'(0)| \leq 1$.

۳. الف- فرض کنید f تابعی تام باشد و به‌ازای هر z ، $|f(z)| > 1$. نشان دهید f تابعی ثابت است.

ب- فرض کنید $f = u + iv$ تابعی تام باشد و $uv \geq 0$. نشان دهید f تابعی ثابت است.

پ- فرض کنید f تابعی تام باشد و

$$f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq 1\}$$

نشان دهید f تابعی ثابت است.

۴. فرض کنید f تابعی تام و غیرثابت باشد و $w_0 \in \mathbb{C}$. نشان دهید دنباله‌ای مانند $\{z_n\}$ وجود دارد که $f(z_n) \rightarrow w_0$.

۵. می‌گوییم تابع f روی $\mathbb{C}$ متناوب مضاعف است اگر عددهایی مختلط مانند w_1 و w_2 وجود داشته باشند که

$$w_1 w_2 \neq 0, \operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) \neq 0$$

و

$$f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

نشان دهید هر تابع متناوب مضاعف تام ثابت است.

۶. الف- فرض کنید f روی میدان D تحلیلی باشد. نشان دهید $\operatorname{Log} |f|$ روی D همساز است.

ب- نشان دهید مشتق از هر مرتبه هر تابع همساز، تابعی همساز است.

پ- در چه شرایطی حاصل ضرب دو تابع همساز، تابعی همساز است؟

ت- فرض کنید تابع u روی میدان D همساز باشد. نشان دهید u روی D مینیموم یا ماکسیموم نسبی ندارد.