

به نام خدا



آزمون میان‌ترم درس معادلات دیفرانسیل
نیم‌سال دوم ۱۴۰۳-۰۴
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

دانشکده علوم ریاضی

- این آزمون شامل ۶ سوال است. پاسخ سوالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سوال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان مجاز نیست.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

۱. فرض کنید $y_1 = e^t$ یک جواب معادله $e^t y' = y^2 + e^t y - e^{2t}$ است. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را به دست آورید: (۱۵ نمره)

$$\begin{cases} e^t y' = y^2 + e^t y - e^{2t}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

۲. جواب عمومی (لازم نیست جواب به صورت صریح نوشته شود) معادله زیر را بیابید:

$$(t + 2y + 3) + (3t + 6y - 1) \frac{dy}{dt} = 0.$$

راهنمایی: از تغییر متغیر مناسب استفاده کنید. (۱۵ نمره)

۳. با فرض $\cos y + 2e^{-t} \cos t \neq 0$ و $y \neq 0$ ، عامل انتگرالسازی به صورت $\mu(t, y) = yf(t)$ برای معادله زیر بیابید و سپس آن را حل کنید: (۲۰ نمره)

$$\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-t} \sin t \right) + \left(\frac{\cos y + 2e^{-t} \cos t}{y} \right) \frac{dy}{dt} = 0.$$

۴. با فرض اینکه معادله دیفرانسیل زیر جوابی به صورت $y_1 = t^\alpha$ دارد، ابتدا α را به دست آورید. سپس با استفاده از روش کاهش مرتبه جواب y_2 (مستقل خطی با y_1) را برای این معادله بیابید: (۱۵ نمره)

$$ty'' + (2 + 2t)y' + 2y = 0, \quad t > 0.$$

۵. فرض کنید سه تابع $\phi_1(t) = t(1 - 2t)$ ، $\phi_2(t) = 2t(1 - t)$ و $\phi_3(t) = t(e^t - 2t)$ ، سه جواب خصوصی معادله زیر باشند، بطوریکه $P(t)$ ، $Q(t)$ و $R(t)$ توابعی پیوسته روی بازه $[a, b]$ با فرض $a > 0$ هستند:

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = R(t).$$

جواب عمومی معادله زیر را با استفاده از روش تغییر پارامتر به دست آورید: (۲۰ نمره)

$$y'' + P(t)y' + Q(t)y = te^t.$$

۶. الف) فرض کنید $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ دو جواب معادله زیر هستند:

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right) + q(t)y = 0,$$

بطوریکه $p(t)$ تابعی ناصفر است. نشان دهید

$$p(t)\left(\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)\right) = C,$$

بطوریکه C عددی ثابت است. (۱۰ نمره)

ب) فرض کنید توابع $p(t)$ و $q(t)$ روی $(-a, a)$ پیوسته هستند. با استدلال کامل توضیح دهید که آیا $\phi_1(t) = t^5$ و $\phi_2(t) = t^7$ می‌توانند دو جواب معادله

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

روی بازه $(-a, a)$ باشند یا خیر. (۵ نمره)