دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

شماره:
تاریخ:
پیوست:

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۲ (گروه‌های ۱—۴)

۶ شهریور ۱۴۰۴   مدّت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. فرض کنید متغیرهای x، y، u و v در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} y\,e^{x} = ۲ + \sin u \\ y^{۲} - x^{۳} - x = ۳ + \cos v \end{cases}$$

توجه می‌کنیم مجموعهٔ نقاطی که در روابط بالا صدق می‌کنند ناتهی است، مثلاً $x = ۰$، $y = ۲$، $u = ۰$ و $v = ۰$ در روابط بالا صدق می‌کنند و لذا نقطهٔ $(۰, ۲, ۰, ۰)$ عضوی از مجموعهٔ مذکور است.

(الف) نشان دهید در هر نقطه از مجموعهٔ مذکور، یک همسایگی وجود دارد که در آن (x, y) را می‌توان به صورت تابعی مشتق‌پذیر از (u, v) نوشت.

(ب) در تابع بالا که y بر حسب u و v است، نقاط بحرانی y را پیدا کنید.

(۲۰ نمره)

سؤال ۲. با استفاده از ضرایب لاگرانژ نشان دهید ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x, y, u, v) = y$ با قیود

$$\begin{cases} y\,e^{x} = ۲ + \sin u \\ y^{۲} - x^{۳} - x = ۳ + \cos v \end{cases}$$

در نقاطی رخ می‌دهد که $\cos u = ۰$ و $\sin v = ۰$.

(۲۰ نمره)

سؤال ۳. ناحیهٔ D را به صورت زیر در نظر بگیرید که در آن a، b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{۳} \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = ۱,\ x, y, z \geq ۰ \right\}.$$

حاصل انتگرال $\iiint_D y\,dxdydz$ را محاسبه کنید.

(۲۰ نمره)

سؤال ۴. میدان برداری $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{۳} - \{(۰, ۰, ۰)\} \longrightarrow \mathbb{R}^{۳}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۳}}}, \frac{y}{\sqrt{(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۳}}}, \frac{z}{\sqrt{(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۳}}} \right).$$

(الف) رویهٔ $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{۳} \mid |x| + |y| + |z| = ۱\}$ را با بردار نرمالِ یکّه و برون‌گرای $\mathbf{n}$ در نظر بگیرید. حاصل انتگرال $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ را محاسبه کنید.

(ب) رویهٔ $\mathcal{S}_{۱} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{۳} \mid x + y + z = ۱,\ x, y, z \geq ۰\}$ را با بردار نرمالِ یکّهٔ $\mathbf{n} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱, ۱, ۱)$ در نظر بگیرید. حاصل انتگرال $\iint_{\mathcal{S}_{۱}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ را محاسبه کنید.

(۲۰ نمره)

• ادامهٔ سؤالات در پشت برگه

tel: (+9821) 66005217
fax: (+9821) 66005117
P.O.Box: 11155-9415 Iran

http://math.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir

تلفن: ۶۶۰۰۵۲۱۷-(۰۲۱)
فکس: ۶۶۰۰۵۱۱۷-(۰۲۱)
صندوق پستی: ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵

سؤال ۵. فرض کنید D یک ناحیهٔ سه بعدی با مرز هموار S و بردار نرمالِ یکّهٔ برون‌گرای $\mathbf{n}$ باشد. هم‌چنین، $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ را تابعی در نظر بگیرید که در تمام نقاط مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته دارد.

(الف) نشان دهید

$$\iiint_D f\,\operatorname{div}(\nabla f)+\iiint_D \nabla f\cdot\nabla f=\iint_S f\nabla f\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

(ب) نشان دهید اگر در تمام نقاط D داشته باشیم $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$ و f در تمام نقاط S صفر باشد، آنگاه f در تمام نقاط D نیز صفر است.

(۲۰ نمره)

سؤال ۶. میدان برداری $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ را با ضابطهٔ $\mathbf{F}(x,y,z)=(xz+yz,2xz,\frac{1}{2}y^2)$ در نظر بگیرید. فرض کنید C خمی باشد که از اشتراک استوانهٔ $x^2+y^2=1$ و رویهٔ $z=x^2-y^2$ به دست می‌آید. جهت خم C را نیز طوری در نظر بگیرید که تصویر آن روی صفحهٔ xy در جهت مثلثاتی باشد. حاصل انتگرال $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.

(۲۰ نمره)

مجموع: ۱۲۰ نمره