

پایان ترم ریاضی مهندسی

① فرض کنید $0 < a < \pi$ و f تابعی زوج، 2π تناوبی است که روی $[\pi, 0]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & a < x \leq \pi \end{cases}$$

سری فوری f را به دست آورید و به کمک آن مقدار سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}$ را حساب کنید. (۲ نمره)

② با حل کردن یک سری مناسب به عنوان جواب، مسئله زیر را حل کنید و جواب را به صورت صریح بنویسید: (۲،۵ نمره)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 3 \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, 1) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u(0, y) = 0 & 0 \leq y \leq 1 \\ u(\pi, y) = 0 & 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

③ با حل کردن یک سری مناسب به عنوان جواب، مسئله زیر را حل کنید و جواب را تا حد امکان ساده کنید. (۲،۵ نمره)

$$u_{tt} = u_{xx} + 1, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad t \geq 0$$

④ به فرض وجود شرایط مناسب روی تابع داده شده، مسئله زیر را با تبدیل فوری سینوسی نسبت به x حل کنید و جواب را تا حد امکان ساده کنید. (۳ نمره)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \leq x, \quad 0 \leq t \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = g(t) \end{cases}$$

جواب را تا حد امکان ساده کنید.
(۳ نمره)

یادآوری: تبدیل فوری سینوسی تابع $f(x)$ عبارت از:

$$F(\omega) = \mathcal{F}_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin(\omega x) dx$$

فرمول مستقیم نام:

$$\mathcal{F}_s(f'') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot f(0) \cdot \omega - \omega^2 \cdot F(\omega)$$

یک فرمول استرالی مفید:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{k\sqrt{k}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{k}} = \int_0^{\infty} \omega \cdot \sin(x\omega) \cdot e^{-k\omega^2} d\omega \quad (k > 0)$$