دانشکده‌ی علوم ریاضی

استاد درس: خانم سحر قاجار نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

تمرینهای سری هشتم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

ماتریس بنیادی دستگاه های معادلات زیر را بدست آورید. همچنین ماتریس آنها را با استفاده از مقادیر ویژه تعمیم یافته به فرم ژوردان بنویسید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{x} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

۲ پرسش دوم

فرض کنید

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

برای هر $i \in \{1,2,3,4\}$، $\exp(\mathbf{J}_i t)$ را محاسبه کنید و با استفاده از آن مسئله مقدار اولیه $\mathbf{x}' = \mathbf{J}_i\mathbf{x}$ $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ را حل کنید.

۳ پرسش سوم

معادلات دیفرانسیل ناهمگن زیر را حل کنید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} \quad t > 0$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

۴ پرسش چهارم

جواب عمومی قسمت همگن معادلات دیفرانسیل ناهمگن زیر داده شده است. آنها را حل کنید.

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$$

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$$