دانشکده‌ی علوم ریاضی

استاد درس: خانم سحر قاجار نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

تمرینهای سری ششم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

نشان دهید بردار $\mathbf{x}$ در معادله دیفرانسیل مربوطه صدق می‌کند.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6e^{-t} \\ -8e^{-t} + 2e^{2t} \\ -4e^{-t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

۲ پرسش دوم

نشان دهید ماتریس $\mathbf{\Psi}$ در معادله دیفرانسیل مربوطه صدق می‌کند.

$$\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{\Psi}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^{t} & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^{t} & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

۳ پرسش سوم

چند جمله ای ویژه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بدست آورید. نشان دهید می توان کل فضای $\mathbb{C}^3$ را از این بردارهای ویژه ساخت.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

۴ پرسش چهارم

نشان دهید $\det \mathbf{A} = 0$ اگر و تنها اگر $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه آن باشد.

۵ پرسش پنجم

نشان دهید برای ماتریس $\mathbf{A}$ که لزوما حقیقی نمی باشد و هر دو بردار دلخواه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y})$ و از آنجا نتیجه بگیرید برای یک ماتریس هرمیتی $\mathbf{A}$ و هر دو بردار دلخواه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$.

۶ پرسش ششم

فرض کنید $\mathbf{A}$ یک ماتریس هرمیتی، λ یک مقدار ویژه آن و $\mathbf{x}$ بردار ویژه متناظر با آن باشد.

(آ) نشان دهید $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$.

(ب) نشان دهید $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \overline{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

(پ) نشان دهید $\lambda = \overline{\lambda}$.

۷ پرسش هفتم

فرض کنید λ_1 و λ_2 مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی $\mathbf{A}$ با مقادیر ویژه متناظر $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ باشند. اگر $\lambda_1 \neq \lambda_2$ نشان دهید $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ متعامد هستند.