دانشکده‌ی علوم ریاضی

استاد درس: خانم سحر قاجار نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

تمرینهای سری پنجم معادلات دیفرانسیل

۱ پرسش نخست

مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید و محدوده هایی که در آن $1 \leq u(t) \leq 2$ را مشخص کنید.

$$u'' + 4u = 0, \quad u(0) = \sqrt{3}, u'(0) = -2$$

۲ پرسش دوم

مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید و نشان دهید برای $t \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$، داریم $|u(t)| < e^{-t}$.

$$u'' + 2u' + 2u = 0, \quad u(0) = -1, u'(0) = 2$$

۳ پرسش سوم

مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید و نشان دهید برای $t \in (0, \frac{1}{3})$، داریم $0 < u(t) < \frac{\sin(\pi t)}{2}$.

$$4u'' + 9\pi^2 u = \pi^2 \cos(\frac{\pi}{2}t), \quad u(0) = u'(0) = 0$$

۴ پرسش چهارم

نشان دهید اگر y_1 یک جواب معادله

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$$

باشد، با جایگذاری $y(t) = v(t)y_1(t)$ در معادله بعنوان جواب، به معادله زیر می رسیم.

$$y_1 v''' + (3y_1' + p_1 y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1)v' = 0$$

با استفاده از این روش معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$t^2(t+3)y''' - 3t(t+2)y'' + 6(1+t)y' - 6y = 0, \quad t > 0, \quad y_1(t) = t^2$$

۵ پرسش پنجم

ابتدا نشان دهید که $\{y_1 = \cosh t, y_2 = \sinh t, y_3 = \cos t, y_4 = \sin t\}$ مجموعه ای از جوابهای معادله $y^{(4)} - y = 0$ است. مقدار دقیق $W[y_1, y_2, y_3, y_4](t)$ را نیز برای هر t دلخواه با استفاده از قضیه آبل مشخص کنید و سپس نشان دهید مجموعه اساسی جواب است.

۶ پرسش ششم

جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

۱) $y^{(6)} + y = 0$.

۲) $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$.

۷ پرسش هفتم

مسئله مقدار اولیه زیر را با روش ضرایب نامعین حل کنید و رفتار جواب را وقتی t به بینهایت میل می کند بیابید.

$$4y''' + y' + 5y = 13e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -10, \quad y''(0) = 0$$

.

۸ پرسش هشتم

برای معادله زیر با روش تغییر پارامتر یک جواب خصوصی بدست آورید و برای $g(t) = t^{-2}e^t$ مقدار دقیق را محاسبه کنبد.

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = g(t)$$

۹ پرسش نهم

برای قسمت همگن معادله زیر یک مجوعه اساسی جواب $\{x, x^2, \frac{1}{x}\}$ را داریم. یک جواب خصوصی با روش تغییر پارامتر برای آن بدست آورید.

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \quad x > 0$$