



دانشکده‌ی علوم ریاضی



نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

استاد درس: خانم سحر قاجار

## تمرینهای سری اول معادلات دیفرانسیل

### ۱ پرسش نخست

فرض کنید  $g(t)$  تابعی فرد است. مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید و مقدار عددی  $y(-2)$  را بدست آورید.

$$y' + 4t^3y = g(t), \quad y(2) = 1$$

### ۲ پرسش دوم

جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید:

$$ty' = 2y + t^3e^t \bullet$$

$$y' = (y - 2) \cot(t) \bullet$$

$$t^2y' + 2ty = \sinh(5t) \bullet$$

$$t^2y' \cos(y) = 2 \sin(y) - 1 \bullet$$

### ۳ پرسش سوم

مسائل مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y' - (1 + 3t^{-1})y = t + 2, \quad y(1) = e - 1 \bullet$$

$$y' = \frac{y}{2y \ln(y) + y - t}, \quad y(0) = 1 \bullet$$

#### ۴ پرسش چهارم

جواب عمومی معادلات زیر را با روش تغییر پارامتر بدست آورید.

$$y' - 2y = t^2 e^{2t} \bullet$$

$$y' + \frac{1}{t}y = \cos(2t), \quad t > 0 \bullet$$

#### ۵ پرسش پنجم

مسئله مقدار اولیه زیر را کامل حل کنید. (مشخص کنید در چه بازه ای جواب وجود دارد).

$$y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1$$

#### ۶ پرسش ششم

مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید و نقطه ماکسیمم جواب را مشخص کنید.

$$y' = \frac{2 - e^x}{3 + 2y}, \quad y(0) = 0$$

#### ۷ پرسش هفتم

معادلات زیر را با روش حل معادلات همگن حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x - y - 6} \bullet$$

$$y^2 dy = x(x dy - y dx) e^{x/y} \bullet$$

#### ۸ پرسش هشتم

یک مخزن آب که ظرفیت ۲۰ لیتر دارد، شامل ۱۰ لیتر آب نمک است که ۲۰ کیلو نمک دارد. آب شیرین با سرعت  $r_1$  لیتر بر دقیقه به آن وارد و از سمت دیگر آب نمک با سرعت  $r_2 < r_1$  لیتر بر دقیقه خارج می شود. مقدار نمک در آب بعد از ۱۰ دقیقه چقدر است؟ چه شرایطی روی  $r_1, r_2$  برقرار باشد که پس از یک ساعت میزان نمک به حداکثر ۲ کیلوگرم رسیده باشد؟

## ۹ پرسش نهم

با استفاده از قضیه وجود و یکتایی معین کنید مسئله مقدار اولیه زیر برای کدام  $x_0$  و  $y_0$  جواب یکتا دارد؟

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{\ln(xy)}, \quad y(x_0) = y_0$$

برای هر جفت  $(x_0, y_0)$  مناسب، بزرگترین بازه ممکن برای جواب را بدست آورید.

## ۱۰ پرسش دهم

مشخص شده است که آمار مرگ و میر یک بیماری واگیردار نرخ زوال 2 آستانه 10 و سطح اشباع 30 را دارد. معادله لجستیک معادل را بنویسید و نمودار  $y$  بر حسب  $t$  را برای مقدارهای اولیه مختلف دقیق (با مشخص بودن نقاط عطف) رسم کنید.