

تمرین سری دوازدهم

سوال ۱

حاصل انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را در ناحیه داده شده محاسبه کنید.

(آ) $\iint_D |x| dA$ ، که در آن D دیسک $x^2 + y^2 \leq a^2$ برای $a > 0$ است.

(ب) $\iint_Q \frac{xy}{x^2+y^2} dA$ ، که در آن Q ربع دیسک مشخص شده با $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ و $x^2 + y^2 \leq a^2$ برای $a > 0$ است.

(ج) $\iint_S (x+y) dA$ ، که در آن S ناحیه‌ی داخل $x^2 + y^2 \leq a^2$ و زیر خط $y = \sqrt{3}x$ است.

(د) $\iint_T (x^2 + y^2) dA$ ، که در آن T مثلث با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(1, 1)$ است.

سوال ۲

حجم ناحیه محصور به سه سیلندر $x^2 + y^2 = a^2$ ، $x^2 + z^2 = a^2$ و $y^2 + z^2 = a^2$ را محاسبه کنید.

سوال ۳

T را مثلث با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ در نظر بگیرید، و حاصل انتگرال $\iint_T e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$ را به دو روش زیر محاسبه کنید.

(آ) با تغییر مختصات قطبی.

(ب) با تغییر مختصات $u = y - x$ و $v = y + x$.

سوال ۴

تابع گاما $\Gamma(x)$ و تابع بتا $B(x, y)$ به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x > 0),$$

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (x > 0, y > 0).$$

می‌دانیم تابع گاما دارای خواص زیر است:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

خواص زیر را برای این دو تابع اثبات کنید:

(آ) $x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds$

(ب) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(ج) اگر $x > 0$ و $y > 0$ ، آنگاه $B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta$

(د) $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

سوال ۵

انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را محاسبه کنید.

(آ) $\int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy$

(ب) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_y^1 \frac{\sin \pi z}{z(1-z)} dz$

(ج) $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dV$ ، که در آن R ناحیه‌ی بالای مخروط $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ و داخل کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ است.

سوال ۶

حجم ناحیه‌ی داخل بیضی‌گون $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ و بالای صفحه‌ی $z = b - y$ را محاسبه کنید.

سوال ۷

- با محاسبه‌ی یک انتگرال دوگانه، مساحت سطوح مشخص شده را به دست آورید.
- آ) سطح سهمی‌گون $z = 1 - x^2 - y^2$ محدود به کنج اول دستگاه مختصات سه‌بعدی.
- ب) سطح سیلندر $x^2 + z^2 = 4$ که بالای ناحیه‌ی $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq x$ قرار دارد.