ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

تمرین سری یازدهم

سوال ۱

انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را روی ناحیه داده شده محاسبه کنید.

آ) $\iint_T (x - ۳y)\mathrm{d}A$، که در آن T مثلث با رئوس $(۰,۰)$، $(a,۰)$ و $(۰,b)$ است.

ب) $\iint_T \sqrt{a^۲ - y^۲}\mathrm{d}A$، که در آن T مثلث با رئوس $(۰,۰)$، $(a,۰)$ و (a,a) است.

ج) $\iint_R \frac{x}{y} e^y \mathrm{d}A$، که در آن R ناحیه‌ی $۰ \le x \le ۱$ و $x \le y \le x^۲$ است.

سوال ۲

برای انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر، دامنه انتگرال‌گیری را رسم کنید، و انتگرال را محاسبه کنید.

آ) $\int_۰^۱ \mathrm{d}x \int_x^۱ \frac{y^\lambda}{x^۲+y^۲}\mathrm{d}y$، که در آن $\lambda > ۰$.

ب) $\int_۰^۱ \mathrm{d}x \int_x^{x^{۱/۳}} \sqrt{۱ - y^۴}\mathrm{d}y$.

ج) $\int_۰^{\pi/۲} \mathrm{d}y \int_y^{\pi/۲} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

سوال ۳

در هر قسمت، حجم ناحیه‌ی مشخص شده را محاسبه کنید:

آ) زیر رویه‌ی $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ و بالای ناحیه‌ی $x \ge ۰$، $y \ge ۰$ و $x + y \le ۱$.

ب) زیر رویه‌ی $z = x^۲ \sin y^۴$ و بالای مثلث در صفحه‌ی xy با رئوس $(۰,۰)$، $(۰,\pi^{۱/۴})$ و $(\pi^{۱/۴},\pi^{۱/۴})$.

ج) داخل دو سیلندر $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و $x^۲ + z^۲ = a^۲$.

سوال ۴

فرض کنید $f(x,t)$ و $f_1(x,t)$ روی مستطیل $a \le x \le b$ و $c \le t \le d$ پیوسته هستند. قرار دهید

$$g(x) = \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_c^d f_1(x,t)\mathrm{d}t.$$

نشان دهید $g'(x) = G(x)$ برای هر $a < x < b$.

سوال ۵

انتگرال‌های ناسره‌ی زیر را محاسبه کنید.

آ) $\iint_Q \frac{x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}A$، که در آن Q ربع اول صفحه‌ی xy است.

ب) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x+y|}\mathrm{d}A$.

ج) $\iint_Q e^{-xy}\mathrm{d}A$، که در آن Q ربع اول صفحه‌ی xy است.

د) $\iint_T \frac{1}{x^3}e^{-y/x}\mathrm{d}A$، که در آن T ناحیه‌ی محصور به $x \ge 1$ و $0 \le y \le x$ است.

سوال ۶

فرض کنید (a,b) یک نقطه‌ی درونی ناحیه‌ی D باشد. به‌علاوه، فرض کنید تابع f با دامنه‌ی D پیوسته است. برای h^2+k^2 به اندازه‌ی کافی کوچک، مستطیل R_{hk} با رئوس (a,b)، $(a+h,b)$، $(a,b+k)$ و $(a+h,b+k)$ درون D قرار می‌گیرد. نشان دهید

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \iint_{R_{hk}} f(x,y)\mathrm{d}A = f(a,b).$$