

تمرین سری هشتم

سوال ۱

- برای $f(x, y) = \sqrt{1 + xy^2}$ در نقطه‌ی $(2, -2)$ موارد زیر را محاسبه کنید.
- آ) گرادیان تابع را در نقطه‌ی داده شده را محاسبه کنید.
- ب) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی داده شده را محاسبه کنید.
- ج) معادله‌ی خط مماس بر منحنی تراز تابع گذرنده از نقطه‌ی داده شده را به دست آورید.

سوال ۲

نشان دهید که در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} xe^y + uz - \cos v = 2 \\ u \cos y + x^2v - yz^2 = 1 \end{cases}$$

می‌توان u و v را به صورت تابعی بر حسب x ، y و z ، در نزدیکی نقطه‌ی P با $(u, v) = (1, 0)$ و $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ نوشت. سپس $(\partial u / \partial z)_{x, y}$ را در $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ محاسبه کنید.

سوال ۳

فرض کنید می‌توان (x, y) را به صورتی تابعی از (u, v) در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

نوشت. نشان دهید

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(F, G) / \partial(u, v)}{\partial(F, G) / \partial(x, y)}$$

تمرین سری هشتم

سوال ۴

اگر در دستگاه معادلات $x = f(u, v)$ و $y = g(u, v)$ بتوان u و v را برحسب x و y حل کرد، آنگاه ثابت کنید

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\partial(x, y)/\partial(u, v)}$$

سوال ۵

سری تیلور توابع زیر را در نقاط خواسته شده به دست آورید:

آ) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+xy}}$ ، $(0, 0)$.

ب) $f(x, y) = \ln(1 + x + y + xy)$ ، $(0, 0)$.

ج) $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ ، $(1, -1)$.

سوال ۶

آ) نشان دهید که معادله $x \sin y = y + \sin x$ پیرامون نقطه $x = 0$ ، جوابی به صورت $y = f(x)$ ، با $f(0) = 0$ دارد. سپس، سه جمله آغازین ناصفر بسط تیلور $f(x)$ برحسب توان‌های x بنویسید.

ب) نشان دهید که معادله $x + 2y + z + e^{xz} = 1$ پیرامون نقطه $(x, y) = (0, 0)$ ، جوابی به صورت $z = f(x, y)$ ، با $f(0, 0) = 0$ دارد. سپس، چندجمله‌ای تیلور مرتبه دوی تابع $f(x, y)$ برحسب توان‌های x و y بنویسید.

سوال ۷

مقدار $\frac{\partial^n}{\partial x^n \partial y^n} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \Big|_{(0,0)}$ را محاسبه کنید.