ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

تمرین سری هفتم

سوال ۱

تابع

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

آ) برای هر (x,y)، نشان دهید $F(x,y)=-F(y,x)$.

ب) برای هر $(x,y)\neq(0,0)$، نشان دهید $F_1(x,y)=-F_2(y,x)$ و $F_{12}(x,y)=-F_{21}(y,x)$.

ج) برای هر y، نشان دهید $F_1(0,y)=-2y$ و درنتیجه، $F_{12}(0,0)=-2$.

د) برای هر x، نشان دهید $F_2(x,0)=2x$ و درنتیجه، $F_{21}(0,0)=2$.

ه) برای هر $x\neq 0$، و با استفاده از قسمت (ب)، $F_{12}(x,x)$ را محاسبه کنید.

و) آیا $F_{12}(x,x)$ در $(0,0)$ پیوسته است؟ چرا؟

سوال ۲

با استفاده از تقریب خطی تابع $f(x,y)=\sin(\pi xy+\ln y)$ تخمینی از مقدار $f(0/01,1/05)$ را محاسبه کنید.

سوال ۳

برای نگاشت

$$g(r,s,t):=(r^2s,r^2t,s^2-t^2),$$

ماتریس ژاکوبی $Dg(1,3,3)$، را محاسبه کنید. سپس، با استفاده از آن، مقدار تقریبی $g(0/99,3/02,2/97)$ را محاسبه کنید.

سوال ۴

برای تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ موارد زیر را ثابت کنید.

آ) اگر تابع f در همسایگی هر نقطه از پاره‌خط واصل نقاط (a,b) و $(a+h,b+k)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد، آنگاه $\theta\in(۰,۱)$ چنان موجود است که

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+hf_{۱}(a+\theta h,b+\theta k)+kf_{۲}(a+\theta h,b+\theta k).$$

ب) اگر تابع f دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته پیرامون نقطه‌ی (a,b) باشد، آنگاه $\theta\in(۰,۱)$ چنان موجود است که برای h و k با قدرمطلق به اندازه کافی کوچک،

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=&f(a,b)+hf_{۱}(a,b)+kf_{۲}(a,b)+h^{۲}f_{۱۱}(a+\theta h,b+\theta k)\\&+۲hkf_{۱۲}(a+\theta h,b+\theta k)+k^{۲}f_{۲۲}(a+\theta h,b+\theta k).\end{aligned}$$

درنتیجه، $K>۰$ چنان موجود است که برای h و k با قدرمطلق به اندازه کافی کوچک،

$$|f(a+h,b+k)-f(a,b)-hf_{۱}(a,b)-kf_{۲}(a,b)|\le K(h^{۲}+k^{۲}).$$

سوال ۵

ضابطه‌ی تابع f در مختصات قطبی را به صورت $f(r,\theta)$ در نظر بگیرید. در مختصات قطبی، نشان دهید

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{۱}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در جهت بردار $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ و $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ بردار یکه‌ی عمود بر $\hat{\mathbf{r}}$ در جهت افزایش θ است.

سوال ۶

اگر $\nabla f(x,y)=۰$ برای هر نقطه‌ی (x,y) که $x^{۲}+y^{۲}<r^{۲}$، برای برخی $r>۰$، آنگاه ثابت کنید که f روی این دیسک، تابعی ثابت است.

سوال ۷

نشان دهید که در دستگاه معادلات

$$\begin{cases}xe^{y}+uz-\cos v=۲\\ u\cos y+x^{۲}v-yz^{۲}=۱\end{cases}$$

می‌توان u و v را به‌صورت تابعی برحسب x، y و z، در نزدیکی نقطه‌ی $P_{۰}$ با $(u,v)=(۱,۰)$ و $(x,y,z)=(۲,۰,۱)$ نوشت. سپس $(\partial u/\partial z)_{x,y}$ را در $(x,y,z)=(۲,۰,۱)$ محاسبه کنید.

سوال ۸

فرض کنید می‌توان (x, y) را به صورتی تابعی از (u, v) در دستگاه معادلات

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

نوشت. نشان دهید

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(F, G)/\partial(u, v)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}.$$

سوال ۹

اگر در دستگاه معادلات $x = f(u, v)$ و $y = g(u, v)$ بتوان u و v را برحسب x و y حل کرد، آنگاه ثابت کنید

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\partial(x, y)/\partial(u, v)}.$$