ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

تمرین سری ششم

سوال ۱

مشتقات جزئی مرتبه اول توابع زیر را در نقطه‌ی $(\circ,\circ)$ با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

آ)
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{۲x^۳-y^۳}{x^۲+۳y^۲}, & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ \circ, & (x,y)=(\circ,\circ)\end{cases}$$

ب)
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۲-۲y^۲}{x-y}, & x\neq y\\ \circ, & x=y\end{cases}$$

سوال ۲

تابع
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{۲xy}{x^۲+y^۲}, & (x,y)\neq(\circ,\circ)\\ \circ, & (x,y)=(\circ,\circ),\end{cases}$$
را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تابع در $(\circ,\circ)$ پیوسته نیست. درحالی‌که، $f_۱(\circ,\circ)$ و $f_۲(\circ,\circ)$ هر دو موجودند.

سوال ۳

معادلات صفحه مماس و خط عمود بر توابع زیر در نقطه‌ی خواسته شده را به‌دست آورید.

آ) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ در نقطه‌ی $(۱,۱)$.

ب) $f(x,y)=\cos(x/y)$ در نقطه‌ی $(\pi,۴)$.

ج) $f(x,y)=\tan^{-۱}(y/x)$ در نقطه‌ی $(۱,-۱)$.

سوال ۴

برای تابع تک‌متغیره‌ی مشتق‌پذیر دلخواه f موارد زیر را اثبات کنید.

آ) تابع $z = f(x^2 + y^2)$، در رابطه‌ی $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

ب) تابع $z = f(x^2 - y^2)$، در رابطه‌ی $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

سوال ۵

تابع دو متغیره‌ی ϕ را هارمونیک نامند، هرگاه در معادله‌ی لاپلاس به صورت

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

صدق کند. فرض کنید که توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته هستند و در معادلات کشی_ریمان به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

صدق می‌کنند. موارد زیر را اثبات کنید.

آ) هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ هارمونیک هستند.

ب) اگر $f(u,v)$ تابعی هارمونیک بر حسب u و v باشد، آن‌گاه $f(u(x,y), v(x,y))$ تابعی هارمونیک بر حسب x و y است.

سوال ۶

برای تابع $F(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ ، $F_1(x,y)$ ، $F_2(x,y)$ ، $F_{12}(x,y)$ و $F_{21}(x,y)$ را در نقطه‌ی $(x,y) \neq (0,0)$ محاسبه کنید. به‌علاوه، این مقادیر را در $(0,0)$ محاسبه کنید و مشاهده کنید که $F_{12}(0,0) \neq F_{21}(0,0)$. توضیح دهید که چرا این رخداد، قضایای بیان شده در درس را نقض نمی‌کند؟