

تمرین سری پنجم

سوال ۱

آ) معادله‌ی صفحه‌ی شامل فصل مشترک دو صفحه‌ی $x + y + z = 0$ و $2x + y - 3z = 2$ و عمود بر صفحه‌ی $17 = 5z - 2y - x$ را به دست آورید.

ب) معادله‌ی خطی که بر هر دو خط

$$\begin{cases} \mathbf{r} = (1+t)\mathbf{i} - t\mathbf{j} - (2+2t)\mathbf{k} \\ \mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (t-2)\mathbf{j} - (1+3t)\mathbf{k} \end{cases}$$

عمود باشد و از نقطه‌ی تقاطع این دو خط عبور کند را به دست آورید.

سوال ۲

برای بردارهای $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ و \mathbf{x} نشان دهید که

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) &= ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x}) \mathbf{w} - ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}) \mathbf{x} \\ &= ((\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} - ((\mathbf{w} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

به طور خاص نشان دهید که

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = ((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}.$$

سوال ۳

L_1 را خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(1, 1, 0)$ و $(2, 0, 1)$ ، و L_2 را خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(1, 1, 1)$ و $(0, 1, 1)$ در نظر بگیرید.

آ) نشان دهید که L_1 و L_2 متافرنند.

تمرین سری پنجم

- ب) طول عمود مشترک دو خط متنافر L_1 و L_2 را محاسبه کنید.
- ج) معادله‌ی دو صفحه‌ی موازی P_1 و P_2 را چنان بیابید که به ترتیب شامل خطوط L_1 و L_2 باشند.

سوال ۴

چرخزادا به معادله‌ی

$$\mathbf{r} = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}.$$

را در نظر بگیرید.

آ) استدلال کنید که این منحنی مسیر حرکت یک نقطه بر روی محیط یک دایره به شعاع a است که در امتداد محور x می‌لغزد.

ب) $s(T)$ را به عنوان طول خم چرخزادا از $t = 0$ تا $t = T$ به دست آورید.

ج) چرخزادا را برحسب پارامتر طول خم s بازپارامتری کنید.

سوال ۵

سطوح تراز تابع $f(x, y) = x + \frac{y^2}{x}$ را تشکیل داده و چندتا از آن‌ها را رسم کنید.

سوال ۶

نشان دهید که حد زیر موجود نیست:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4 + y^4}.$$

سوال ۷

نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در مبدأ پیوسته است. سپس مشتق‌های جزئی تابع f را در صورت وجود، در مبدأ مختصات محاسبه کنید.

¹cycloid