

## تمرین سری چهارم

## سوال ۱

نمودار (گراف) توابع زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } f(x, y) = \sin x, \quad (0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1)$$

$$\text{ب) } f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad (x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4)$$

$$\text{ج) } f(x, y) = |x| + |y|$$

$$\text{د) } f(x, y) = 6 - x - 2y$$

## سوال ۲

سطوح تراز توابع زیر را تشکیل دهید. سپس برخی از این ترازها را رسم کنید.

$$\text{الف) } f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\text{ب) } f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$$

$$\text{ج) } f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

$$\text{د) } f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

$$\text{ه) } f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$$

## سوال ۳

در صورت وجود، حدهای زیر را محاسبه کنید. در غیر این صورت دلیل عدم وجود حد را بیان کنید.

$$\text{الف) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{y}$$

تمرین سری چهارم

ب)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$

ج)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

د)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$

سوال ۴

تحت چه شرایطی بر روی  $a, b$  و  $c$ ، حد  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{ax^2+bx+cy^2}$  موجود است. ادعای خود را اثبات کنید.

سوال ۵

تابع  $f(x, y)$  که در نقطه‌ی  $(a, b)$  تعریف شده است را در نظر بگیرید.

آ) توابع تک متغیره‌ی  $g(t) = f(t, b)$  و  $h(t) = f(a, t)$  را تعریف کنید. اگر تابع  $g$  در  $t = a$  و تابع  $h$  در  $t = b$  پیوسته باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت که تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته است؟ اگر تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که تابع  $g$  در  $t = a$  و تابع  $h$  در  $t = b$  پیوسته هستند؟ پاسخ‌های خود را با استدلال مناسب توجیه کنید.

ب) برای بردار یکه‌ی  $\mathbf{z} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ ، تابع تک‌متغیره‌ی  $f_{\mathbf{u}}(t) := f(a + tu, b + tv)$  را تعریف کنید. اگر تابع  $f_{\mathbf{u}}(t)$  در  $t = 0$  برای هر بردار یکه‌ی  $\mathbf{u}$  پیوسته باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته است؟ اگر تابع  $f(x, y)$  در نقطه‌ی  $(a, b)$  پیوسته باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که تابع  $f_{\mathbf{u}}(t)$  برای هر بردار یکه‌ی  $\mathbf{u}$  در  $t = a$  پیوسته است؟ پاسخ‌های خود را با استدلال مناسب توجیه کنید.

سوال ۶

آیا می‌توان تابع  $f(x, y) = \frac{\sin x \sin^2 y}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$  را در  $(0, 0)$  به گونه‌ای تعریف کرد که در این نقطه پیوسته شود؟ چگونه؟

سوال ۷

مشتقات جزئی مرتبه اول تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2y^2}{x - y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

را در نقطه‌ی  $(x, y) = (0, 0)$  محاسبه کنید.