ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

تمرین سری سوم

سوال ۱

در قسمت‌های زیر فرض کنید که توابع برداری داده شده از هر مرتبه‌ی مورد نیاز مشتق‌پذیر پیوسته هستند.

آ) عبارت $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{u}\times\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right)$ را بسط دهید.

ب) عبارت $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\mathbf{u}+\mathbf{u}'')\bullet(\mathbf{u}\times\mathbf{u}')\right)$ را بسط دهید.

ج) عبارت $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\mathbf{u}\times\mathbf{u}')\bullet(\mathbf{u}'\times\mathbf{u}'')\right)$ را بسط دهید.

سوال ۲

ربع دایره $x^2+y^2=a^2$ در ناحیه اول مختصات را به صورت‌های زیر پارامتری کنید.

آ) بر حسب y و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت.

ب) بر حسب طول قوس محاسبه شده از نقطه‌ی $(0,a)$ و در جهت عقربه‌های ساعت.

سوال ۳

تقاطع صفحه‌ی $z=1+x$ و مخروط $z^2=x^2+y^2$ یک سهمی است. این سهمی را با پارامترهای زیر پارامتری کنید. کدام یک از این انتخاب‌ها برای t منجر به یک پارامترسازی واحد برای توصیف کل سهمی می‌شود؟

آ) $t=x$.

ب) $t=y$.

ج) $t=z$.

سوال ۴

دایره‌ی $\mathcal{C}$ از تقاطع صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ و کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ حاصل شده است. مرکز این دایره، $\mathbf{r}_۰$، و شعاع آن، r، را به‌دست آورید. به‌علاوه، دو بردار عمود بر هم $\hat{\mathbf{v}}_۱$ و $\hat{\mathbf{v}}_۲$ را موازی صفحه‌ی شامل $\mathcal{C}$ به‌دست آورید.

سوال ۵

خم‌های زیر را بر حسب طول قوس، دوباره پارامتری کنید.

آ) $\mathbf{r} = a\cos^۳ t\,\mathbf{i} + a\sin^۳ t\,\mathbf{j} + b\cos ۲t\,\mathbf{k}$، $(۰ \le t \le \frac{\pi}{۲})$.

ب) $\mathbf{r} = ۳t\cos t\,\mathbf{i} + ۳t\sin t\,\mathbf{j} + ۲\sqrt{۲}t^{۳/۲}\,\mathbf{k}$.

سوال ۶

برای خم $\mathcal{C}$ دو پارامتری‌سازی $\mathbf{r} = \mathbf{r}_۱(t)$، $a \le t \le b$ و $\mathbf{r} = \mathbf{r}_۲(u)$، $c \le u \le d$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که هر دو در دامنه‌شان یک به یک و هم‌جهت هستند. به‌علاوه، فرض کنید $\mathbf{r}_۱(a) = \mathbf{r}_۲(c)$ و $\mathbf{r}_۱(b) = \mathbf{r}_۲(d)$. لذا، برای هر $t \in [a,b]$، $u = u(t) \in [c,d]$ به طور یکتا یافت می‌شود. ثابت کنید:

$$\int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_۱(t)\right| \mathrm{d}t = \int_c^d \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\mathbf{r}_۲(u)\right| \mathrm{d}u,$$

و نتیجه بگیرید که طول خم $\mathcal{C}$ مستقل از نوع پارامتری‌سازی است.

سوال ۷

فرض کنید که خم $\mathcal{C}$ داری سرعت پیوسته و ناصفر $\mathbf{v}(t)$ برای هر $t \in [a,b]$ باشد. نشان دهید که تابع

$$s = g(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)| \mathrm{d}u$$

روی $[a,b]$ صعودی اکید و درنتیجه وارون‌پذیر است و

$$t = g^{-۱}(s) \Leftrightarrow s = g(t).$$

بنابراین، نشان دهید که خم را می توان بر حسب طول قوس پارامتری کرد.