ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

تمرین سری دوم

سوال ۱

معادلات خطوط توصیف شده‌ی زیر را به صورت استاندارد و پارامتری بنویسید.

آ) خط گذرنده از نقطه‌ی $(۱, \ ۰, \ -۱)$ و عمود بر صفحه‌ی $۲x - y + ۷z = ۱۲$.

ب) خط گذرنده از مبدا مختصات و موازی فصل مشترک صفحات $x + ۲y - z = ۲$ و $۲x - y + ۴z = ۵$.

ج) خط گذرنده از نقطه‌ی $(-۱, \ -۱, \ ۲)$ و موازی هر دو صفحه‌ی $x+y = ۰$ و $x-y+۲z = ۰$.

سوال ۲

برای صفحات تک پارامتری زیر، یک توصیف هندسی ارائه کنید. λ پارامتر حقیقی است.

آ) $x + \lambda y + \lambda z = \lambda$.

ب) $\lambda x + \sqrt{۱ - \lambda^۲} y = ۱$.

سوال ۳

تحت چه شرایطی بر روی بردار موقعیت نقاط مجزای $P_۱, P_۲, P_۳, P_۴$ خط گذرنده از نقاط $P_۱$ و $P_۲$، خط گذرا بر دو نقطه‌ی $P_۳$ و $P_۴$ را در یک نقطه قطع می‌کند.

سوال ۴

برای خطوط تک پارامتری زیر یک توصیف هندسی ارائه کنید. λ پارامتر حقیقی است.

آ) $(۱ - \lambda)(x - x_۰) = \lambda(y - y_۰), \ z = z_۰$.

ب) $\frac{x-x_۰}{\sqrt{۱-\lambda^۲}} = \frac{y-y_۰}{\lambda} = z - z_۰$.

سوال ۵

نشان دهید که مساحت مثلث با رئوس $(x_۱,\ y_۱,\ ۰)$، $(x_۲,\ y_۲,\ ۰)$ و $(x_۳,\ y_۳,\ ۰)$ برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\left|\begin{vmatrix} x_۱ & y_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & ۱ \end{vmatrix}\right|.$$

سوال ۶

در هر کدام از قسمت‌های زیر، موقعیت مکانی یک ذره در لحظه‌ی t داده شده است. مسیر حرکت ذره را توصیف کنید. بعلاوه، تندی، سرعت و شتاب ذره را در لحظه‌ی t محاسبه کنید.

آ) $\mathbf{r} = t^۲\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

ب) $\mathbf{r} = a\cos t\ \mathbf{i} + a\sin t\ \mathbf{j} + ct\ \mathbf{k}$.

ج) $\mathbf{r} = a\cos \omega t\ \mathbf{i} + b\mathbf{j} + a\sin \omega t\ \mathbf{k}$.

د) $\mathbf{r} = at\cos \omega t\ \mathbf{i} + at\sin \omega t\ \mathbf{j} + b\ln t\ \mathbf{k}$.

ه) $\mathbf{r} = e^{-t}\cos(e^t)\mathbf{i} + e^{-t}\sin(e^t)\mathbf{j} - e^t\mathbf{k}$.

سوال ۷

در قمست‌های زیر فرض کنید که توابع برداری داده شده از هر مرتبه‌ی مورد نیاز مشتق‌پذیر پیوسته هستند.

آ) ثابت کنید $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^۲\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^۲}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^۳\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^۳}$.

ب) عبارت $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\right)$ را بسط دهید.

ج) عبارت $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\right)$ را بسط دهید.