ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

تمرین سری اول

سوال ۱

آ) زاویه A در مثلث با رئوس $A\,(۲,\ -۱,\ -۱)$، $B\,(۰,\ ۱,\ -۲)$ و $C\,(۱,\ -۳,\ ۱)$ را بدست آورید.

ب) مثلث با رئوس $A\,(۱,\ ۲,\ ۳)$، $B\,(۱,\ ۳,\ ۴)$ و $C\,(۰,\ ۳,\ ۳)$ از چه نوعی است؟

ج) مساحت مثلث با رئوس $A\,(۱,\ ۲,\ ۳)$، $B\,(۴,\ ۰,\ ۵)$ و $C\,(۳,\ ۶,\ ۴)$ را محاسبه کنید.

سوال ۲

فرض کنید P، Q، R و S، به ترتیب، وسط اضلاع AB، BC، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید چهارضلعی $PQRS$ متوازی‌الاضلاع است.

سوال ۳

اگر بردار $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^۳$ با محورهای مختصات زاویه‌های α، β و γ داشته باشد، نشان دهید که

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$$

یک بردار یکه است.

سوال ۴

برای دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^۳$ که هم‌راستای یک‌دیگر نیستند، مجموعه‌های زیر را با دلیل به صورت هندسی توصیف کنید.

آ) $\{\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$،

ب) $\{\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \mid \lambda, \mu \geq ۰\}$،

ج) $\{\lambda\mathbf{u}+(۱-\lambda)\mathbf{v}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\}$،

د) $\{\lambda\mathbf{u}+(۱-\lambda)\mathbf{v}\,|\,\lambda\geq ۰\}$،

ه) $\{\lambda\mathbf{u}+(۱-\lambda)\mathbf{v}\,|\,\lambda\in[۰,۱]\}$،

و) $\{\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v}\,|\,\lambda+\mu\leq ۱,\lambda,\mu\geq ۰\}$.

$\boxed{\text{سوال ۵}}$

برای سه بردار $\mathbf{u}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$، $\mathbf{v}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{w}=۲\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$ به موارد زیر پاسخ دهید.

آ) دو بردار یکه‌ی عمود بر هر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بیابید.

ب) بردار $x\in\mathbb{R}^۳$ را چنان بیابید که $\mathbf{x}\bullet\mathbf{u}=۹$، $\mathbf{x}\bullet\mathbf{v}=۴$ و $\mathbf{x}\bullet\mathbf{w}=۶$.

ج) دو بردار یکه را چنان بیابید که زاویه‌ی برابر با بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ داشته باشند.

د) بردار یکه‌ای که نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ باشد را معرفی کنید.

$\boxed{\text{سوال ۶}}$

برای بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ ثابت کنید:

آ) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^۲=|\mathbf{u}|^۲+۲\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+|\mathbf{v}|^۲$،

ب) $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$،

ج) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$.

$\boxed{\text{سوال ۷}}$

برای اعداد حقیقی r,s,t که $r\neq ۰$ و $s\neq ۰$ و بردار $\mathbf{a}$ صادق در شرط $|\mathbf{a}|^۲\geq ۴rst$، بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ را چنان بیابید که

$$\begin{cases} r\mathbf{x}+s\mathbf{y}=\mathbf{a}, \\ \mathbf{x}\bullet\mathbf{y}=t. \end{cases}$$

$\boxed{\text{سوال ۸}}$

آ) فرض کنید $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ ولی $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq 0$. ثابت کنید اسکالرهای λ و μ چنان موجود هستند که $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$.

ب) برای بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ ثابت کنید:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \bullet \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

سوال ۹

در هر یک از قسمت‌های زیر، معادله‌ی صفحه‌ی خواسته شده را بیابید:

آ) صفحه گذرنده بر سه نقطه‌ی $(1, 1, 0)$، $(2, 0, 2)$ و $(3, 3, 0)$.

ب) صفحه گذرنده از دو نقطه‌ی $(1, 1, 1)$ و $(2, 0, 3)$ و عمود بر صفحه‌ی $x+2y-3z = 0$.

ج) صفحه‌ی شامل فصل مشترک دو صفحه‌ی $2x + 3y - z = 0$ و $x - 4y + 2z = -5$ و گذرنده از نقطه‌ی $(-2, 0, -1)$.

سوال ۱۰

فواصل خواسته شده را محاسبه کنید:

آ) فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 2, 0)$ تا صفحه‌ی $3x - 4y - 5z = 2$.

ب) فاصله‌ی مبدا مختصات تا خط $x + y + z = 0$ و $2x - y - 5z = 1$.

ج) فاصله‌ی بین دو خط

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2z = -5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$