



۱. به کمک تعریف ریاضی حد اثبات کنید:

$$\text{الف: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

$$\text{ب: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$\text{ج: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\text{د: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1+x^2} = 0$$

۲. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید حد توابع همواره یکتا است.

۳. اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ، نشان دهید وجود دارد $\delta > 0$ ، به طوری که

الف:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |g(x)| < 1 + |M|.$$

ب:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |g(x)| > \frac{|M|}{2}.$$

۴. تابع $F(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$ مفروض است. ثابت کنید وجود دارد حداقل یک عدد حقیقی c به طوری که

$$F(c) = \frac{a+b}{2}$$

۵. فرض کنید تابع f روی بازه $[0, 1]$ پیوسته باشد. اگر داشته باشیم $f(0) = f(1)$ ، نشان دهید برای $a \in [0, \frac{1}{4}]$ داریم:

$$f(a) = f(a + \frac{1}{4})$$

۶. اگر تابع f زوج و از راست پیوسته در صفر باشد. نشان دهید در صفر نیز پیوسته است. همچنین اگر تابع g فرد و از راست پیوسته در نقطه y صفر باشد. نشان دهید در صفر پیوسته است.

۷. فرض کنید تابع f پیوسته روی بازه $[0, 1]$ باشد و برای هر x داشته باشیم $0 \leq f(x) \leq 1$. نشان دهید وجود دارد

$$f(c) = c \text{ به طوری که } c \in [0, 1]$$

۸. اگر f پیوسته باشد ثابت کنید $|f|$ نیز پیوسته است و در مورد صحت عکس آن بحث کنید.

۹. فرض کنید برای $|x| \leq 1$ داریم $|x| \leq f(x) \leq x + x^2$. نشان دهید f در صفر مشتق پذیر است و $f'(0)$ را بیابید.