



دانشکده علوم ریاضی  
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا  
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری سیزدهم

۱. تصویر خط  $y = -1$  و قرص باز  $|z - 2| < 2$  را تحت اثر نگاشت  $\omega = (1 + i)z - 2$  بیابید.

۲. تصویر  $\frac{1}{4c} < y < 0$  ( $c > 0$ ) را تحت اثر نگاشت  $\omega = \frac{1}{z}$  بیابید. همچنین تصویر  $x^2 - y^2 = 1$  را تحت اثر این نگاشت پیدا کنید.

۳. ثابت کنید تصویر  $|z| = a$  تحت اثر نگاشت  $\omega = z + \frac{1}{z}$  یک بیضی است ( $a \neq 1$ ).

۴. تصویر خطوط  $x = c$ ,  $y = d$  و  $ax + by = 1$  را تحت اثر نگاشت  $\omega = z^2$  بیابید.

۵. تصویر میدان بین دو سهمی  $r(1 - \cos \theta) = 2a^2$  و  $r(1 - \cos \theta) = 2b^2$ ،  $b > a > 0$  را تحت اثر نگاشت  $\omega = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$  بیابید.

۶. تصویر میدان  $|x| < \frac{\pi}{4}$  و  $y > 0$  را تحت نگاشت  $\omega = \sin z$  بیابید.

۷. نگاشت میبوسی را بیابید که نقاط  $0$ ،  $1$  و  $\infty$  را به ترتیب بر  $0$ ،  $1$  و  $\infty$  بنگارد.

۸. اگر  $z_0 > 0$ ، آنگاه نگاشت زیر نیم‌صفحه بالایی را به صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد می‌نگارد و  $z$  را به مبدأ می‌برد:

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

درباره به‌دست آوردن این نگاشت و عملکرد آن بحث کنید.

۹. اگر  $z_0$  در داخل دیسک واحد باشد، آنگاه نگاشت

$$w = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$$

به صورت یک‌به‌یک و پوشا دیسک واحد را بر دیسک واحد و نقطه  $z_0$  را بر  $0$  می‌نگارد. درباره به‌دست آوردن این نگاشت و عملکرد آن بحث کنید.