



دانشکده‌ی علوم ریاضی



نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

زمان: ۳ ساعت

## میانترم معادلات دیفرانسیل

\* ارزش تمامی سوالات با هم برابر است.

### ۱ پرسش نخست

جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}, \quad x > 0$$

### ۲ پرسش دوم

فرض کنید معادله  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , ( $x > 0$ ) یک معادله همگن باشد. نشان دهید

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$$

یک فاکتور انتگرال برای آن است و با استفاده از آن معادله  $y' = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$  را حل کنید. (راهنمایی: اگر  $f$

یک تابع همگن از مرتبه  $n$  باشد،  $x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = nf(x, y)$

### ۳ پرسش سوم

به ازای چه مقادیری از  $a$  جواب مسئله مقدار اولیه زیر اکسترم دارد؟ آیا وقتی  $x \rightarrow \infty$  این جواب به سمت صفر می رود؟

$$y'' - 2ay + a^2y = -e^{ax}(\cos x + \sin x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 + a, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

میانترم معادلات دیفرانسیل-۱

## ۴ پرسش چهارم

$y_1 = e^{-x}$  در معادله همگن متناظر با معادله زیر صدق می کند. جواب  $y_2$  برای همگن متناظر که  $\{y_1, y_2\}$  مجموعه اساسی جواب برای آن است و یک جواب خصوصی تک جمله ای برای معادله ناهمگن بدست آورید.

$$(\sin x)y'' + (2 \sin x - \cos x)y' + (\sin x - \cos x)y = e^{-x}, \quad 0 < x < \pi$$

## ۵ پرسش پنجم

نشان دهید  $\{y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = xe^x, y_4 = xe^{-x}\}$  جوابهایی برای معادله همگن متناظر معادله زیراند.

$$x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + x^2(12 - x^2)y'' + 2x(x^2 - 12)y' + 2(12 - x^2)y = F(x), \quad x > 0$$

سپس با استفاده از قضیه آبل  $W[y_1, y_2, y_3, y_4](x)$  را محاسبه کنید و نشان دهید  $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  یک مجموعه اساسی جواب است.

## موفق باشید

$g(t)$	$Y(t) \ (s = 0, 1, 2)$
$P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t} \cos \beta t$ یا $P_n(t)e^{\alpha t} \sin \beta t$	$t^s((A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha t} \cos \beta t + (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \dots + B_n)e^{\alpha t} \sin \beta t)$