



دانشکده‌ی علوم ریاضی



نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

زمان: ۳ ساعت

## پایانترم معادلات دیفرانسیل

### ۱ پرسش نخست

در معادله دیفرانسیل زیر، نقاط تکین منظم را پیدا کنید و بر حسب مقادیر مختلف  $b$  تنها فرم جوابها را تعیین کنید.

$$x^2(1-x)^3 y'' + bx(1-x)^2 y' - by = 0, \quad x > 0$$

### ۲ پرسش دوم

معادله انتگرو دیفرانسیلی زیر را حل کنید.

$$y^{(n)} + y - 1 = \int_0^t \sin(t-x)y(x)dx, \quad t > 0, \quad n \geq 3$$

$$y(0) = y''(0) = 1, \quad y^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1 \text{ or } i \geq 3$$

### ۳ پرسش سوم

مقدار  $k$  را از معادله زیر بدست آورید.

$$\int_0^{\infty} t^2 k^{-t} \sin t dt = 0$$

پایانترم معادلات دیفرانسیل-۱

## ۴ پرسش چهارم

معادله دیفرانسیل ناهمگن زیر را به روش تغییر پارامتر حل کنید.

$$t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$$

## ۵ پرسش پنجم

فرم ژردان ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$  را تعیین کنید. حالا با توجه به یافته خودتان، روش حل دستگاه

معادله همگن مرتبه اول  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  را شرح دهید. لازم نیست که جواب عددی را بیابید. تنها فرم و مدل جوابها و روش بدست آوردن هر کدام را شرح دهید. اگر روش حل شما نیاز به یافتن چند بردار داشت، آن را حتما استاندارد فرض کنید. یک بردار را استاندارد می نامیم اگر اولین درآیه ناصفر آن برابر با ۱ باشد. مثلا  $u_1, u_2, u_3$ ، استاندارد است اما  $v$  استاندارد نیست.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\*ارزش تمامی سوالات با هم برابر است.

\*\*هر جا از جدول لاپلاس استفاده می کنید، حتما شماره ردیف مورد استفاده را ذکر کنید.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(s))$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. $e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n$ ( $n$ یک عدد صحیح است)	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $
8. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s >  a $
9. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$ ( $n$ یک عدد صحیح است)	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
12. $u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
16. $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
17. $\delta(t-c)$	$e^{-cs}$
18. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$