ریاضی عمومی ۲ **(بهار ۱۴۰۳)**

پاسخ آزمون میان‌ترم

پاسخ هر سوال توسط مصحح آن سوال تنظیم شده است.

پاسخ سوال ۱

ابتدا توجه کنید که

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma(t)\times\gamma'(t)\right)=\gamma'(t)\times\gamma'(t)+\gamma(t)\times\gamma''(t)=\gamma(t)\times\left(a(t)\gamma(t)\right)$$
$$=a(t)\gamma(t)\times\gamma(t)=0.$$

بنابراین، $\gamma(t)\times\gamma'(t)$ برداری ثابت خواهد بود، یعنی $\gamma(t)\times\gamma'(t)=c$، برای برخی $c\in\mathbb{R}^3$ **(۵ نمره)**.
دو حالت زیر را برای بردار ثابت c در نظر بگیرید:

آ) **حالت $c\neq 0$:** از آن‌جا که بردارهای $\gamma(t)$ و $\gamma'(t)$ بر $\gamma(t)\times\gamma'(t)$ یکدیگر عمودند، داریم:

$$\left(\gamma(t)\times\gamma'(t)\right)\bullet\gamma(t)=0\Rightarrow c\bullet\gamma(t)=0\Rightarrow c_1\gamma_1(t)+c_2\gamma_2(t)+c_3\gamma_3(t)=0.$$

بنابراین، این خم در معادله صفحه‌ی $c_1x+c_2y+c_3z=0$ صدق می‌کند، و در این صفحه قرار می‌گیرد **(۱۰ نمره)**.

ب) **حالت $c=0$:** باتوجه به این‌که $\gamma(t)\neq 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\gamma'(t)=\alpha(t)\gamma(t)$. درنتیجه،

$$\begin{cases}\gamma_1'(t)=\alpha(t)\gamma_1(t)\\ \gamma_2'(t)=\alpha(t)\gamma_2(t)\\ \gamma_3'(t)=\alpha(t)\gamma_3(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma_1(t)=\eta_1e^{\int_0^t\alpha(\tau)\mathrm{d}\tau}\\ \gamma_2(t)=\eta_2e^{\int_0^t\alpha(\tau)\mathrm{d}\tau}\\ \gamma_3(t)=\eta_3e^{\int_0^t\alpha(\tau)\mathrm{d}\tau}\end{cases}$$

بنابراین، $\gamma(t)$ روی یک خط مبداگذر قرار می‌گیرد، درنتیجه، در یک صفحه قرار می‌گیرد.

پاسخ سوال ۲

(۱.۲) می‌دانیم $\frac{\partial x}{\partial u} = x$ و $\frac{\partial y}{\partial u} = y$. با جای‌گذاری در عبارت داده شده داریم:

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (y-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

(۳ نمره). چون مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته هستند، از عبارت بالا داریم:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &+ (y-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

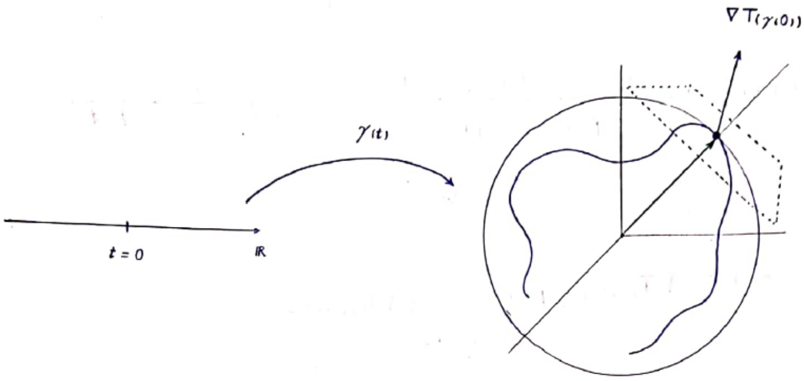
(۷ نمره).
(۲.۲) با توجه به این‌که $\frac{\partial x}{\partial v} = e^u$ و $\frac{\partial y}{\partial v} = -e^u$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}e^u - \frac{\partial z}{\partial y}e^u = e^u\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &- \frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u}\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned} \tag{۱.۰}$$

(۳ نمره). با جای‌گذاری (۱.۰) در معادله به‌دست آمده از قسمت اول سوال، داریم:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (y-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}e^{-u}\right) \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}e^{-u} - \frac{\partial z}{\partial v}e^{-u} \\ &= e^{-u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

(۷ نمره).

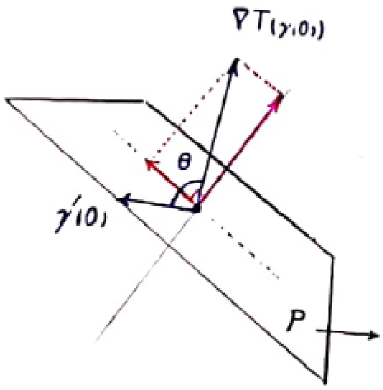


پاسخ سوال ۳

(۱.۳) خم $\gamma(t)$ را مسیر حرکت دماسنج در نظر بگیرد. تابع $T\circ\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، دمایی که دماسنج در لحظه‌ی t نشان می‌دهد را محاسبه می‌کند. لذا، نرخ تغییرات دما در $t=۰$ برابر است با

$$(T\circ\gamma)'(۰)=\gamma'(۰)\bullet\nabla T(\gamma(۰))=\left\|\nabla T\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\right\|\|\gamma'(۰)\|\cos\theta$$

که در آن θ زاویه میان بردارهای $\nabla T\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)=\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۴}{\sqrt{۳}}\right)$ و $\gamma'(۰)$ است **(۲ نمره)**. توجه داریم که نرخ تغییرات دما بیشینه می‌شود اگر و تنها اگر $\cos\theta$ بیشینه شود، و $\cos\theta$ بیشینه می‌شود اگر و تنها اگر θ کمینه شود. لذا، جهت مورد نظر این قسمت از سوال، جهتی است که به ازای آن، θ، یعنی زاویه بین $\gamma'(۰)$ و $\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۴}{\sqrt{۳}}\right)$، کمینه شود. از طرف دیگر، θ در صورتی کمینه است که $\gamma'(۰)$ در جهت تصویر بردار $\nabla T(\gamma(۰))=\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۴}{\sqrt{۳}}\right)$ روی صفحه‌ی P باشد **(۴ نمره)**.



صفحه‌ی قائم بر $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

پس اگر تصویر بردار $\nabla T(\gamma(\circ))$ روی صفحه‌ی P را با $\mathrm{proj}_P(\nabla T(\gamma(\circ)))$ نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)}(\nabla T(\gamma(\circ))) &= \frac{\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۴}{\sqrt{۳}}\right)\bullet\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)}{\left\|\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\right\|^۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\\ &= \frac{۸}{۳}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right),\end{aligned}$$

(۲ نمره). در نتیجه،

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_P(\nabla T(\gamma(\circ))) &= \nabla T(\gamma(\circ)) - \mathrm{proj}_{\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)}(\nabla T(\gamma(\circ)))\\ &= \left(\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۲}{\sqrt{۳}},\frac{۴}{\sqrt{۳}}\right) - \frac{۸}{۳}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}},\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\\ &= \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}\left(-۱,-۱,۲\right).\end{aligned}$$

بنابراین، $(-۱,-۱,۲)$ جهت مورد نظر این قسمت از سوال است **(۲ نمره)**.
(۲.۳) توجه داریم که دمای نمایش داده شده توسط دماسنج در زمان t برابر است با $T\circ\gamma(t)$. در نتیجه،

$$(T\circ\gamma)'(t) = \nabla T(\gamma(t))\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t))\bullet\frac{\nabla T(\gamma(t))}{\|\nabla T(\gamma(t))\|^۲} = ۱,$$

(۵ نمره). در نتیجه، $T\circ\gamma(t) = t + c$ **(۳ نمره)**. از طرفی،

$$T\circ\gamma(\circ) = c \Rightarrow T(۱,\circ,\circ) = c \Rightarrow c = ۱,$$

(۱ نمره). به این‌ترتیب،

$$T\circ\gamma(t) = t+۱ \Rightarrow T\circ\gamma(۲\circ) = ۲۱,$$

(۱ نمره).

پاسخ سوال ۴

(۱.۴) با در نظر گرفتن

$$F(x,y,z,u,v) := xy^۲ + zu + u^۲ - ۳$$
$$G(x,y,z,u,v) := x^۳z + ۲y - uv - ۲$$
$$H(x,y,z,u,v) := xv + yu - xyz - ۱,$$

باید مقدار $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}|_{(۱,۱,۱,۱,۱)}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}|_{(۱,۱,۱,۱,۱)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{bmatrix}_{|(۱,۱,۱,۱,۱)}$$

$$= \det\begin{bmatrix} y^۲ & ۲xy & u \\ ۳x^۲z & ۲ & x^۳ \\ v-yz & u-xz & -xy \end{bmatrix}_{|(۱,۱,۱,۱,۱)} \qquad \textbf{(۵ نمره)}$$

$$= \det\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad \textbf{(۴ نمره)}$$

$$= ۴ \neq ۰. \qquad \textbf{(۱ نمره)}$$

در نتیجه، مطابق قضیه تابع ضمنی می‌توان متغیرهای x، y و z را برحسب توابعی مشتق‌پذیر از u و v نوشت.

(۲.۴)

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix},$$

(۲ نمره). با محاسبه ماتریس وارون داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix},$$

(۳ نمره). به این‌ترتیب،

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ \\ \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & \frac{۱}{۲} \\ -۳ & -\frac{۳}{۴} \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \qquad \textbf{(۵ نمره)}.$$

(۳.۴) از معادله سوم نسبت به u مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial x}{\partial u}v + \frac{\partial y}{\partial u}u + y - \frac{\partial x}{\partial u}yz - x\frac{\partial y}{\partial u}z - xy\frac{\partial z}{\partial u} = ۰,$$

(۳ نمره). از عبارت بالا، یک‌بار دیگر نسبت به u مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ x}{\partial u^۲}v + \frac{\partial^۲ y}{\partial u^۲}u + \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial^۲ x}{\partial u^۲}yz - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}z - \frac{\partial x}{\partial u}y\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}z - x\frac{\partial^۲ y}{\partial u^۲}z \\ - x\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}y\frac{\partial z}{\partial u} - x\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - xy\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲} = ۰,\end{aligned}$$

(۵ نمره). با ساده‌سازی و جای‌گذاری مقادیر به‌دست آمده از قسمت قبل داریم $\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲} = ۸$ **(۲ نمره)**.

پاسخ سوال ۵

ابتدا توجه داریم که

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x(1+x^2+y^2)e^{x^2-y^2}\\ 2y(1-y^2+x^2)e^{x^2-y^2}\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x,y)&=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2+10x^2+2y^2+4x^4+4x^2y^2 & -4x^3y-4xy^3\\ -4x^3y-4xy^3 & 2-10y^2-2x^2+4y^4+4x^2y^2\end{bmatrix}e^{x^2-y^2}.\end{aligned}$$

(۱.۵) برای محاسبه نقاط بحرانی، کافی است که دستگاه معادلات $\nabla f(x,y)=0$ را حل کنیم.

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2x(1+x^2+y^2)\\ 2y(1-y^2+x^2)\end{bmatrix}e^{x^2-y^2}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow x=0,\quad y=0,\pm 1.$$

بنابراین، نقاط بحرانی تابع عبارتند از $P_1=(0,0)$، $P_2=(0,-1)$ و $P_3=(0,1)$.
برای نقطه‌ی $P_1=(0,0)$ داریم:

$$\nabla^2 f(0,0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A=2>0\\ B^2-AC=-4<0\end{cases}$$

در نتیجه $P_1=(0,0)$ یک کمینه‌کننده‌ی (مینیمم) نسبی است.
برای نقطه‌ی $P_2=(0,1)$ داریم:

$$\nabla^2 f(0,1)=\begin{bmatrix}4e^{-1} & 0\\ 0 & -4e^{-1}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A=4e^{-1}>0\\ B^2-AC=16e^{-2}>0\end{cases}$$

در نتیجه $P_2=(0,1)$ یک نقطه‌ی زینی است.
برای نقطه‌ی $P_3=(0,-1)$ داریم:

$$\nabla^2 f(0,-1)=\begin{bmatrix}4e^{-1} & 0\\ 0 & -4e^{-1}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A=4e^{-1}>0\\ B^2-AC=16e^{-2}>0\end{cases}$$

در نتیجه $P_3=(0,-1)$ یک نقطه‌ی زینی است.
(۲.۵)

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)\approx&f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right)\\ \Rightarrow f(0.01,0.1)\approx&f(0,0)+0.01\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+0.1\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\\ &+\frac{1}{2}\left(0.0001\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+0.002\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)+0.01\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right),\end{aligned}$$

با جایگذاری مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم تابع f در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ که در قسمت قبل محاسبه کرده‌ایم در عبارت بالا داریم:

$$f(۰/۰۱, ۰/۱) \approx ۰/۰۱۰۱.$$

بارم‌بندی:

(۱.۵)

محاسبه مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم (گرادیان و ماتریس هسی): ۱۰ نمره.

به‌دست آوردن نقاط بحرانی و نوع آن‌ها: ۱۰ نمره.

(۲.۵)

فرمول بسط تیلور مرتبه دوم و جایگذاری در آن: ۸ نمره.

جواب آخر: ۲ نمره.

پاسخ سوال ۶

(۶.۱) با توجه به این‌که A مجموعه‌ای بسته و کران‌دار (فشرده) است، و تابع f روی A پیوسته است، می‌توان نتیجه گرفت که تابع f روی مجموعه‌ی A دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است **(۲ نمره)**.
توجه داریم در نقاط مرزی A، $x = \circ$ یا $y = \circ$ یا $z = \circ$. در نتیجه، روی مرز A، داریم $f(x, y, z) = \circ$.
از طرفی، در نقاط درونی مجموعه‌ی A داریم $x > \circ$، $y > \circ$ و $z > \circ$ و در نتیجه $f(x, y, z) > \circ$. لذا، ماکزیمم مطلق تابع f نمی‌تواند در نقاط مرزی مجموعه‌ی A رخ دهد **(۳ نمره)**.
(۶.۲) مطابق بخش (۶.۱)، می‌دانیم ماکزیمم مطلق تابع f در $x = \circ$ یا $y = \circ$ یا $z = \circ$ رخ نمی‌دهد. بنابراین، باید ماکزیمم مطلق تابع f را از میان نقاط صادق در قید $g(x, y, z) = x + y + z - a = \circ$، که $x > \circ$ و $y > \circ$ و $z > \circ$ جست‌جو کنیم. با توجه به این‌که $\nabla g(x, y, z) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}^T \neq \circ$، و طبق قضیه ضرایب لاگرانژ، نقطه‌ی ماکزیمم تابع f روی نقاط صادق در قید $g(x, y, z) = \circ$، باید در دستگاه معادلات زیر صدق کند.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = \circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \\ x + y + z = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = xz = xy \\ x + y + z = a \end{cases}$$

(۱۰ نمره). با توجه به این‌که $x \neq \circ$، $y \neq \circ$ و $z \neq \circ$ از دستگاه بالا می‌توان نتیجه گرفت که $x^* = y^* = z^* = \frac{a}{۳} > \circ$ ماکزیمم مطلق تابع f روی مجموعه‌ی A است و مقدار ماکزیمم مطلق برابر است با $f(x^*, y^*, z^*) = \frac{a^۳}{۲۷}$. **(۱۰ نمره)**
(۶.۳) با توجه به قسمت قبل، برای هر $(x, y, z) \in A$ داریم:

$$f(x, y, z) \leq \frac{a^۳}{۲۷} \Rightarrow xyz \leq \frac{a^۳}{۲۷} \Rightarrow \sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{a}{۳} \Rightarrow \sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{۳},$$

که نامساوی آخر از این‌که برای هر $(x, y, z) \in A$ داریم $x + y + z = a$، نتیجه شد. با توجه به این‌که مقدار $a > \circ$ دلخواه بوده، لذا، برای هر $x, y, z \geq \circ$ نشان دادیم که

$$\sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{۳},$$

(۵ نمره).