به‌نام خدا

تاریخ: ۰۳/۲/۲۰
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲ (گروه‌های ۱، ۲، ۳، ۵)

مدّت امتحان: $۳\frac{۱}{۲}$ ساعت

۲۲–۰۱۶

نیمسال دوم ۰۳–۰۲

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچهٔ امتحانی بنویسید. استفاده از ماشین حساب و نیز هرگونه پرسش و پاسخ در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.

سؤال ۱. فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۳$ خمی باشد که از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند. اگر تابع $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد با این ویژگی که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ تساوی $\gamma''(t) = a(t)\gamma(t)$ برقرار باشد، نشان دهید تصویر γ در یک صفحه قرار دارد.

سؤال ۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$، $z = f(x, y)$، تابعی باشد که دارای مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته روی $\mathbb{R}^۲$ است. قرار می‌دهیم $x = (۱ + v)e^u$ و $y = (۱ - v)e^u$. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$x\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + (y - x)\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} - y\,\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}.$$

(۱.۲) مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ اوّل x و y را نسبت به u به دست آورید و با جایگذاری آنها در عبارت داده شده، عبارت را به صورت " $\frac{\partial}{\partial u}$(یک عبارت) " بنویسید.

(۲.۲) به کمک قسمت قبل، عبارت داده شده را بر حسب مشتقات پاره‌ای z نسبت به u و v به صورت ساده شده بازنویسی کنید.

سؤال ۳. اتاق بزرگی را در نظر بگیرید که دمای داخل آن به حالت تعادل در آمده است و فرض کنید با قرار دادن مناسب محورهای مختصات در اتاق، دما در نقطهٔ (x, y, z) از قانون $T(x, y, z) = x^۲ + y^۲ + ۲z^۲$ پیروی می‌کند.

(۱.۳) کره‌ای به شعاع واحد و به مرکز مبدأ مختصات را در اتاق در نظر بگیرید و فرض کنید دماسنجی با تندی ثابت روی کره در حال حرکت است. اگر دماسنج در زمان $t = ۰$ در نقطهٔ $(\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}})$ از کره قرار داشته باشد، مشخص کنید حرکت دماسنج در چه جهتی باشد که بیشترین نرخ تغییرات دما را داشته باشد؟

CamScanner

(۲.۳) فرض کنید γ خمی باشد که مسیر حرکت دماسنج دیگری را در اتاق نشان می‌دهد. همچنین، فرض کنید به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ تساوی زیر برقرار باشد:

$$\gamma'(t) = \frac{\nabla T}{\|\nabla T\|^۲}(\gamma(t)).$$

اگر دماسنج در زمان $t = ۰$ در نقطهٔ $(۱, ۰, ۰)$ قرار داشته باشد، در زمان $t = ۲۰$ چه دمایی را نشان خواهد داد؟

سؤال ۴. فرض کنید متغیرهای x، y، z، u و v در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} xy^۲ + zu + u^۲ = ۳ \\ x^۳z + ۲y - uv = ۲ \\ xv + yu - xyz = ۱ \end{cases}$$

(۱.۴) نشان دهید در یک همسایگی از نقطهٔ $(x, y, z, u, v) = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$ می‌توان متغیرهای x، y و z را برحسب توابعی مشتق‌پذیر از u و v نوشت.

(۲.۴) مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ اوّل x، y و z را نسبت به u و v در نقطهٔ $(u, v) = (۱, ۱)$ محاسبه کنید.

(۳.۴) مقدار $\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲}$ را در نقطهٔ $(u, v) = (۱, ۱)$ محاسبه کنید. (راهنمایی: به معادلهٔ سوم از دستگاه توجه کنید.)

سؤال ۵. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(x, y) = (x^۲ + y^۲)e^{x^۲ - y^۲}$ در نظر بگیرید.

(۱.۵) تمام نقاط بحرانی f را مشخص و نوع آنها را شناسایی کنید.

(۲.۵) مقدار تقریبی $f(۰/۰۱, ۰/۱)$ را به کمک چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ دوم f محاسبه کنید.

سؤال ٦. فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت است. قرار دهید

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^۳ \mid x + y + z = a,\ x \geq ۰,\ y \geq ۰,\ z \geq ۰\right\}$$

و تابع $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $f(x, y, z) = xyz$ در نظر بگیرید.

(۱.٦) نشان دهید f دارای ماکزیمم مطلق است و آن را در نقاط مرزی A به خود نمی‌گیرد.

(۲.٦) با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، ماکزیمم مطلق f را به دست آورید.

(۳.٦) به کمک قسمت قبل، نشان دهید به ازای هر $x, y, z \geq ۰$،

$$\sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{۳}.$$

توزیع نمره.

سؤال ۱: ۲۰ نمره، سؤال ۲: ۱۰+۱۰ نمره،
سؤال ۳: ۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۰+۱۰+۱۰ نمره،
سؤال ۵: ۲۰+۱۰ نمره، سؤال ٦: ۵+۲۰+۵ نمره.

مجموع: ۱۵۰ نمره

CamScanner