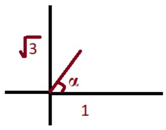
به نام خدا		
پاسخنامه میان ترم ریاضی عمومی ۱		نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

پاسخ سوال یک:

نمایش عبارت $(۱+i\sqrt{۳})^{۱۰۰}$ به صورت زیر است:



$$\theta = \operatorname{Arctan}\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\pi}{۶} \qquad \text{۲نمره}$$

$$r = \sqrt{x^{۲}+y^{۲}} = \sqrt{۱+۳} = ۲ \qquad \text{۲نمره}$$

$$(۱+i\sqrt{۳})^{۱۰۰} = ۲^{۱۰۰}(\cos\pi/۶ + i\sin\pi/۶)^{۱۰۰} = \frac{۲^{۱۰۰}(\cos ۱۰۰\pi/۶ + i\sin ۱۰۰\pi/۶)}{\text{۲نمره}} = \frac{۲^{۱۰۰}(\cos ۲\pi/۳ + i\sin ۲\pi/۳)}{\text{۲نمره}}$$

$$= \frac{۲^{۱۰۰}(-\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{\text{۲نمره}}$$

$$\operatorname{Re}(۱+i\sqrt{۳})^{۱۰۰} = -۲^{۹۹} \qquad \operatorname{Im}(۱+i\sqrt{۳})^{۱۰۰} = ۲^{۹۹}\sqrt{۳}$$

راه حل های صحیح دیگر:

استفاده از شکل نمایی اعداد مختلط.

$$(۱+i\sqrt{۳})^{۱۰۰} = (۲e^{\frac{\pi}{۶}})^{۱۰۰} = \frac{۲^{۱۰۰}(\cos ۱۰۰\pi/۶ + i\sin ۱۰۰\pi/۶)}{\text{۲نمره}} = \frac{۲^{۱۰۰}(\cos ۲\pi/۳ + i\sin ۲\pi/۳)}{\text{۲نمره}}$$

$$= \frac{۲^{۱۰۰}(-\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲})}{\text{۲نمره}}$$

$$\operatorname{Re}(۱+i\sqrt{۳})^{۱۰۰} = -۲^{۹۹} \qquad \operatorname{Im}(۱+i\sqrt{۳})^{۱۰۰} = ۲^{۹۹}\sqrt{۳}$$

اشتباهات پرتکرار:

۱) اشتباه سهوی: بجای عدد ۱۰۰ به عنوان توان، جایگذاری یک عدد دیگر.

۲) استفاده از یک زاویه اشتباه به عنوان آرگومان سینوس و کسینوس.

پاسخ سوال دوم:

۶نمره محاسبه حد و ۴ نمره تعریف پیوستگی

ابتدا حد تابع را در نقطه $x = 1$ محاسبه می کنیم. برای این کار از طرفین $\ln$ می گیریم.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}} \quad \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}} \quad \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x-1}\ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\ln y = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\ln x \quad (I)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\ln x = \frac{0}{0} \quad \text{Hop} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\ln x = 1, \quad (I) \Rightarrow \lim_{x\to 1}\ln y = 1$$

$$\Rightarrow y = e^{1} = e \quad \Rightarrow f(1) = e$$

تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$ ترکیب یک تابع توانی با یک تابع هموگرافیک است و برای اینکه پیوسته باشد در نقطه $x = 1$ باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

راه حل های صحیح دیگر: استفاده از رابطهٔ زیر و سپس حد گیری

$$y = e^{\ln x^{\frac{1}{x-1}}}$$

اشتباهات پرتکرار:

۱) اشتباه محاسباتی در به دست آوردن حد.

۲) عدم اشاره به پیوستگی.

پاسخ سوال سوم:

راه حل اول تابع $f(x) = x + e^{x}$ را در بازه $(-1, 0)$ درنظر میگیریم

$$f(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + 1/e < 0 \qquad \text{۲نمره}$$

$$f(0) = 0 + e^{0} = 1 > 0 \qquad \text{۲نمره}$$

پس طبق قضیه مقدار میانی یک ریشه در بازه $(-1, 0)$ برای تابع ما وجود دارد زیرا تابع پیوسته است. (۲ نمره)

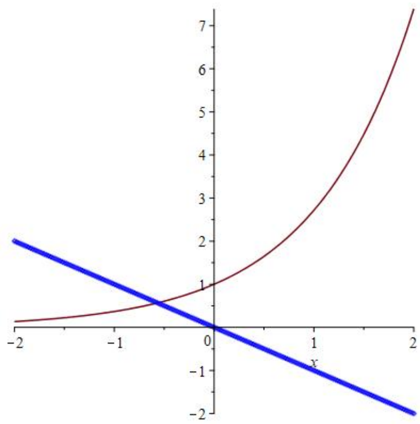
مشتق آن یعنی $f'(x) = ۱ + e^x$ یک تابع همواره مثبت است. (۲نمره)

تابع $f(x)$ اکیداً صعودی و یک به یک است پس دقیقاً همین یک ریشه را دارد. (۲نمره)

راه حل دوم (فرض خلف)

$e^x + x = ۰ \quad \Rightarrow e^x = -x$

x	-۱	a	۱
$f(x)$	$۱/e - ۱$	۰	$e + ۱$



همانطور که مشاهده می شود $f(۰) > ۰, \quad f(-۱) < ۰$ باتوجه به پیوستگی تابع f و قضیه مقدار میانی نقطه a بین ۰ و ۱- وجود دارد که مقدار تابع در آن برابر با صفر است. (۴نمره)

مکان نقطه مابین دو عدد صحیح متوالی ۰ و ۱- است (۲نمره) و فقط در یک نقطه نمودارها یکدیگر را قطع کردند زیرا اگر فرض خلف کنیم که دو نقطه مانند $x_۱$ و $x_۲$ وجود داشته باشد که تابع صفر شود باید طبق قضیه رول مشتق در یک نقطه صفر شود که با توجه به مشتق تابع که همواره مقداری مثبت و بزرگتر از یک است به تناقض می رسیم.

پس نقطه ی حاصل تنها جواب خواهد بود (۴نمره)

اشتباهات پرتکرار:

۱) عدم محاسبه مشتق یا عدم اشاره به مثبت بودن آن.

۲) عدم یافتن دو نقطهٔ صحیح متوالی.

۳) عدم اشاره یا توجیه یکتایی جواب.

روش غالب دانشجویان روش اول بود اما برخی از روش دوم استفاده کرده بودند که نمره به آنها تعلق گرفت و راه حل شان به عنوان راه حل دوم در پاسخ نامه ذکر شد. افرادی که فقط رسم شکل داشتند ۳ نمره به آن ها تعلق گرفته است.

پاسخ سوال چهارم:

$$(x^۲+y^۲)^۲ = x^۲ - y^۲$$

$$\frac{dy}{dx}(x^۲+y^۲)^۲ = \frac{dy}{dx}(x^۲-y^۲) \Rightarrow ۲(x^۲+y^۲)(۲x+۲yy') = ۲x - ۲yy'$$

$$y' = ۰ \Rightarrow ۲(x^۲+y^۲)۲x = ۲x \Rightarrow x^۲+y^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۴ نمره

$$\Rightarrow (x^۲+y^۲)^۲ = x^۲ - y^۲ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ - y^۲ = \frac{۱}{۴} \\ x^۲ + y^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۸} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۲}}$$

$$y = \pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

۳ نمره

محاسبه ی مشتق دوم برای تعیین تقعر منحنی

$$۲(۲x+۲yy')(۲x+۲yy') + ۲(x^۲+y^۲)(۲+۲y'.y'+۲yy'') = ۲ - ۲(y'^۲+yy'')$$

$$y' = ۰, \Rightarrow ۴x(۲x) + ۲(x^۲+y^۲)(۲+۲yy'') = ۲ - ۲yy''$$

$$x^۲+y^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x^۲ = -yy'' \Rightarrow y'' = \frac{۲x^۲}{-y}$$

۲ نمره

پس $y'' \leq ۰$ درنتیجه $y > ۰ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۱نمره

اشتباهات رایج: اشتباه در مشتق ضمنی و پیدا کردن نقاط $y' = ۰$ ، پیدا نکردن مشتق دوم برای تعیین اکسترمم.

راه حل های صحیح دیگر:

محاسبه ی مشتق اول به کمک $y' = \frac{-f_x}{f_y}$

به دست آوردن نقطه ی فوقانی به کمک تعیین علامت y'

پاسخ سوال پنجم:

هریک از معادلات (مساوی یا نامساوی) ۲ نمره

برای حل لازم است از قضیه ی مقدار میانگین استفاده شود.

$$\exists\theta \in (x,y) \;\; \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\theta) \Rightarrow \frac{f(۵)-f(۱)}{۵-۱} = f'(\theta) \Rightarrow \frac{f(۵)-۲}{۵-۱} \geq \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{f(۵)-۲}{۵-۱} \geq \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(۵) \geq ۸$$

اشتباهات رایج: عدم استفاده از قضیه مقدار میانگین یا تصور اینکه تابع ذکر شده در صورت سوال یک تابع خاص، مانند تابع خطی یا درجه سوم است تا تابعی با مشتق مثبت به دست آید. تصور اینکه $f(x)$ یک تابع خطی است و نوشتن معادله ی آن در حالی که این توابع فقط یک مثال هستند و و الزامی ندارد تابع حتما خطی باشد.

پاسخ سوال ششم:

$$f(x) = \sqrt[۳]{x}$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}} = \frac{۱}{۳(\sqrt[۳]{x})^{۲}} \Rightarrow f'(۲۷) = \frac{۱}{۲۷}$$

$$L(x) = ۳ + \frac{۱}{۲۷}(x-۲۷)$$

$$\Rightarrow L(۲۵) = ۳ + \frac{۱}{۲۷}(۲۵-۲۷) = ۳ - \frac{۲}{۲۷}$$

۶ نمره

تخمین خطا $E = f(x) - L(x)$ خطای تقریب باشد داریم:

$$|E| \leq \max_{۰\leq c\leq ۱}|\frac{h^{۲}}{۲}f''(x+ch)|$$

۱ نمره

بطوریکه $۰ \leq c \leq ۱$ ماکسیمم در $c = ۱$ و $h = -۲$ است

$$\max_{0\leq c\leq 1}|\frac{h^2}{2}f''(x+ch)| = \max_{0\leq c\leq 1}|\frac{(-2)^2}{2}\times\frac{-2}{9}\frac{1}{(\sqrt[3]{27+c(-2)})^5}| = |\frac{-4}{9\sqrt[3]{(25)^5}}|$$

۳ نمره

اشتباهات رایج: عدم استفاده از بسط تیلور یا عدم به کارگیری صورت صحیح بسط تیلور. استفاده از مشتق مرتبه سوم (به جای مرتبه دوم)در تخمین خطا.