به نام خدا		
پاسخنامه پایان ترم ریاضی عمومی یک		نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

پاسخ سوال یک:

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{۴نمره}$$

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} (\cos\theta + i\sin\theta)^k = \sum_{k=0}^{n} (\cos k\theta + i\sin k\theta) \qquad *$$

از طرفی

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - (\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1}}{1 - (\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1 - (\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta)}{1 - \cos\theta - i\sin\theta} \qquad \text{۴نمره}$$

$$= \frac{(1 - \cos(n+1)\theta - i\sin(n+1)\theta)(1 - \cos\theta + i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \qquad \text{۴نمره}$$

$$= \frac{\big((1 - \cos(n+1)\theta)(1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta\big) + \text{یک ضریب } i}{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} \qquad ** \quad \text{۴نمره}$$

مقایسه ای حقیقی در * و ** داریم

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\big((1 - \cos(n+1)\theta)(1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta\big)}{2 - 2\cos(\theta)}$$

$$= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\csc\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(1+n)\theta}{2}\right) \qquad \text{۴نمره}$$

راه حل دوم: می توان از فرم قطبی استفاده کرد:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n} (e^{\theta i})^k = \mathrm{Re}\Big(\frac{1 - e^{(n+1)\theta i}}{1 - e^{\theta i}}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1 - (\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta)}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}\Big)$$

در ادامه در مزدوج مخرج ضرب می کنیم و خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\big((1 - \cos(n+1)\theta)(1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta\big)}{2 - 2\cos(\theta)}$$

$$= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\csc\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(1+n)\theta}{2}\right)$$

پاسخ سوال دوم:

نشان می دهیم حداقل یک ریشه دارد. از آنجا که

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

پس f دارای حداقل یک ریشه در $\mathbb{R}$ است. ۱۰ نمره.

اگر از تابع مشتق بگیریم:

$$f(x) = x^۳ + ax + b \longrightarrow f'(x) = ۳x^۲ + a > ۰$$

چون مشتق بزرگتر از صفر است پس تابع f اکیداً صعودی است و دقیقا یک ریشه دارد. ۱۰ نمره

روش دیگر برای اثبات یکتایی ریشه:

فرض کنیم دو ریشه مانند $x_۱$ و $x_۲$ وجود داشته باشد بنابراین باید مشتق در یک نقطه مانند $c \in (x_۱, x_۲)$ برابر صفر شود. که با فرض $a > ۰$ در تناقض است.

راه حل سوم ارائه شده توسط خانم ریحانه السادات مرتضوی:

چون چند جمله ای درجه ی سوم داریم، پس روی دامنه ی اعداد مختلط دارای سه ریشه است. از آنجایی که مزدوج هر عدد مختلط نیز یک ریشه چند جمله ای خواهد بود، پس حداقل یک ریشه حقیقی c باید وجود داشته باشد. چون تنها ریشه های حقیقی، مزدوج آن با خودش برابر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$x^۳ + ax + b = (x - c)\big(x^۲ + cx + (a + c^۲)\big)$$

چون اگر دلتای معادله ی درجه دوم را محاسبه کنیم عددی منفی خواهد شد. پس دو ریشه مابقی نمی توانند حقیقی باشند، بنابراین تنها یک ریشه ی حقیقی خواهیم داشت.

پاسخ سوال سوم:

الف) ۱۰ نمره.

راه حل اول: طبق قضیه چون f تابعی پیوسته و مشتق پذیر روی دامنه خود، هست پس مقدار $f'(۰)$ موجود و متناهی است.

$$f'(۰) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(h) - f(۰)}{h}$$

در این صورت اگر حد مورد نظر را با h مثبت در نظر بگیریم حد نامنفی است و اگر یکبار با h منفی در نظر بگیریم حد نامثبت است و نتیجه می گیریم حد صفر است پس $f'(۰) = ۰$.

راه حل دوم:

می‌توان اشاره کرد تابع پیوسته روی بازه بسته مینیمم دارد و چون نامنفی است و در صفر مقدار تابع برابر با صفر شده است پس نقطه صفر یک نقطه مینیمم موضعی است پس مشتق در آن برابر با صفر است.

ب) راه حل اول:

۱۰ نمره. چون سه بار مشتق پذیر است پس $f''(x)$ اولا وجود دارد و درثانی مشتق پذیر است. پس پیوسته هم هست. بازه $[-۱, ۱]$ هم فشرده است پس $|f''(x)|$ روی این بازه مقدار ماکزیمم خود را اتخاذ می کند. آن را $۲M$ می نامیم. به این ترتیب $|f''(x)| \leq ۲M$. سپس با انتگرالگیری روی بازه ی ۰ تا x معلوم می شود که برای هر x داخل بازه $|f'(x)| \leq ۲M|x|$.

اگر یکبار دیگر انتگرال بگیریم معلوم می شود که برای هر x

$$|f(x)| \leq ۲\frac{M}{۲}x^۲ \quad \Rightarrow |f(x)| \leq Mx^۲.$$

راه حل دوم:

می‌توان از خطای چندجمله‌ای تیلور مرتبه یکم استفاده کرد (به عبارت دیگر خطای تقریب خطی)

$$f(x) = f(۰) + f'(۰)x + f''(c)\frac{x^۲}{۲} = f''(c)\frac{x^۲}{۲}$$

میدانیم c بین صفر و یک است بنابراین می توانیم در نظر بگیریم $|f''(c)| \leq M$ و حکم اثبات می شود.

راه حل سوم ارائه شده توسط آقای پارسا دبیری:

میتوانیم تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x^{۲}} & x \neq ۰ \\ \dfrac{f''(۰)}{۲} & x = ۰ \end{cases}$$

چون تابع f سه بار مشتق پذیر است، پس $f''(۰)$ کران دار است. اگر بتوانیم ثابت کنیم تابع g روی بازه ی بسته ی $[-۱, ۱]$ پیوسته است، کران داری آن نتیجه می شود و در نتیجه حکم به اثبات می رسد. بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در صفر بررسی کنیم، با به کاربردن دوبار قاعده ی هوپیتال خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to ۰} g(x) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{f'(x)}{۲x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to ۰} \frac{f''(x)}{۲} = \frac{f''(۰)}{۲}.$$

نحوه بارم بندی قسمت ب:

۲ نمره کران داری مشتق دوم و استفاده صحیح از آن در راه حل انتخابی.

۴ نمره استفاده صحیح از $f(۰) = ۰$ براساس راه حل انتخابی .

۴ نمره استفاده صحیح از $f'(۰) = ۰$ براساس راه حل انتخابی.

پاسخ سوال چهارم:

کافی است تابع فاصله را از نقطه ی $(\frac{۳}{۲}, ۰)$ در نظر بگیریم:

$$d(x,y) = \sqrt{(x - \frac{۳}{۲})^۲ + y^۲}$$

می توانیم هدف مسئله را مینیمم کردن تابع مجذور فاصله فرض کنیم و با توجه به ضابطه ی سهمی، تابع هدف را به صورت زیر بنویسم:

$$f(x) = (x - \frac{۳}{۲})^۲ + ۲x$$

معادله ی $f'(x) = ۰$ در نقطه های $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ و $(\frac{۱}{۲}, -۱)$ صدق میکند. اگر از ضابطه ی سهمی مشتق بگیریم $۲yy' = ۲$ و نقطه های مذکور را قرار دهیم، می توانیم شیب خط مماس را محاسبه کنیم. بنابراین معادلات خطوط مماس به صورت زیر خواهد شد:

$$y - ۱ = ۱(x - \frac{۳}{۲})$$

و

$$y - ۱ = -۱(x - \frac{۳}{۲})$$

نحوه بارم بندی:

۸ نمره به تشخیص تابع هدف برای مینیم کردن و محاسبه ی مشتق آن

۵ نمره یافتن دو نقطه ی مینیمم

۵ نمره محاسبه ی شیب مماس برای دو نقطه

۲ نمره نوشتن ضابطه ی خطوط مماس

در این سوال به افرادی که تنها یکی از خطوط مماس را یافته بودند نیز، نمره ی کامل تعلق گرفته است.

پاسخ سوال پنجم:

$$u = x^{۴} - ۱ \qquad (۶)$$

$$du = ۴x^{۳}dx \qquad (۶)$$

$$\int \frac{x^{۳}}{x^{۴} - ۱}\,dx = \int \frac{۱}{۴u}du = \frac{۱}{۴}\ln(x^{۴} - ۱) \qquad (۸)$$

پاسخ سوال ششم:

$$y = \int_{۱}^{x} \sqrt{t^{۳} - ۱}\,dt \qquad ۱ \leq x \leq ۴$$

$$S = \int_{۱}^{۴} \sqrt{۱ + (y'(t))^{۲}}\,dt \qquad (۴)$$

$$y' = (\int_{۱}^{x} \sqrt{t^{۳} - ۱}\,dt)' \Rightarrow y' = \sqrt{x^{۳} - ۱} \qquad (۴)$$

$$S = \int_{۱}^{۴} \sqrt{۱ + (\sqrt{x^{۳} - ۱})^{۲}}\,dx = \int_{۱}^{۴} \sqrt{۱ + (x^{۳} - ۱)}\,dx = \int_{۱}^{۴} \sqrt{x^{۳}}\,dx = \int_{۱}^{۴} x^{\frac{۳}{۲}}\,dx \qquad (۸)$$

$$= \frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}}\Big|_{۱}^{۴} = \frac{۲}{۵}[۴^{\frac{۵}{۲}} - ۱^{\frac{۵}{۲}}] = \frac{۶۲}{۵} \qquad (۴)$$

پاسخ سوال هفتم:

$$a_n = \frac{\sqrt{n+۱} - \sqrt{n-۱}}{n} \times \frac{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱}}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱}} = \frac{۲}{n(\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱})}$$

۴ نمره

کافی است با سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\frac{۳}{۲}}}$ مقایسه کنیم.

۸ نمره

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۱$$

۴ نمره

بنابراین طبق آزمون مقایسه چون $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا است پس $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگرا خواهد شد.

۴ نمره

پاسخ سوال هشتم: اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

کافی است اتحاد فوق را بر F_nF_{n-1} تقسیم کرده و خواهیم داشت:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_{n-2}F_{n-1}}$$

که نتیجه می دهد:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_{n-2}F_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}$$

با ادامه ی این روند خواهیم داشت:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_1}{F_2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}$$

چون $F_1 = F_2 = 1$ رابطه ی زیر اثبات می شود:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}$$

چون سری متناوب است و جملات مثبت و نزولی پس سری فوق همگرا است.

برای یافتن دامنه ی همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$ کافی است حاصل حد زیر را داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{R}$$

که با توجه به قسمت الف این حد موجود است. حال با استفاده از رابطه ی فیبوناچی داریم:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

بنابراین در بی نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{R} = 1 + R$$

ریشه های این معادله ی درجه دوم برابر $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ که چون شعاع همگرایی مثبت است فقط ریشه اول قابل قبول هست.

راه حل دوم برای اثبات $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}$:

به کمک اتحاد داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

بنابراین سری

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}$$

یک سری تلسکوپی می شود و رابطه ی زیر به سادگی اثبات می گردد.

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_1}{F_2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k}$$

با توجه به اینکه $F_1 = F_2 = 1$ این بخش اثبات می شود.

نحوه بارم بندی:

۴ نمره استفاده از راهنمایی داده شده و رسیدن به سری مورد نظر.

۴ نمره اثبات همگرایی سری متناوب.

۴ نمره نشان دادن وجود حد مورد نظر و محاسبه ی مقدار آن.

۴ نمره نوشتن آزمون نسبت برای شعاع همگرایی.

۴ نمره به دست آوردن شعاع همگرایی.