بسمه تعالی

ریاضی عمومی ۱

امتحان پایان‌ترم | **مدت: ۳½ ساعت** | **تاریخ سه‌شنبه ۲۹ خرداد ۱۴۰۳**

همهٔ سؤالات نمرهٔ برابر دارند.

۱ فرمولی بسته برای محاسبهٔ $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ بیابید.
(راهنمایی: برای $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ابتدا $\sum_{k=0}^{n} z^k$ را محاسبه کنید).

۲ نشان دهید اگر a و b حقیقی و $a > 0$ آنگاه چندجمله‌ای $x^3 + ax + b$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۳ فرض کنید $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و حداقل سه بار مشتق‌پذیر روی بازهٔ $(-1,1)$ باشد به طوری که $f(0) = 0$ و برای هر $x \in [-1,1]$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$.
الف) نشان دهید $f'(0) = 0$.
ب) نشان دهید عدد ثابت M وجود دارد به طوری که نامساوی $f(x) < Mx^2$ برای هر $x \in [-1,1]$ برقرار است.

۴ نقطه P از سهمی به معادلهٔ $y^2 = 2x$ که نسبت به نقطهٔ $(\frac{3}{2}, 0)$ نزدیک‌ترین فاصله دارد را بیابید. این فاصله را محاسبه کنید. معادلهٔ خط مماس بر این سهمی را در نقطه P به دست آورید.

۵ مقدار انتگرال $\int \frac{x^3}{x^4 - 1} dx$ را بیابید.

۶ خم $y(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt$ را به ازای $1 \leq x \leq 4$ در نظر بگیرید و طول آن را بیابید.

۷ اگر $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$ مشخص کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست یا واگرا؟ (راهنمایی: ضرب در مزدوج صورت و استفاده مناسب از آزمون‌های مقایسه).

۸ دنباله فیبوناچی $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 3)$$

الف) نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ وجود دارد و مقدار آن را محاسبه کنید. (راهنمایی: می‌توانید در صورت نیاز از اتحاد $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ استفاده کنید. برای اثبات همگرایی دنباله $\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\}$ ابتدا نشان دهید $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{F_k F_{k-1}}$. هر روش دیگری برای اثبات همگرایی $\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\}$ قابل قبول است و الزامی به استفاده از این راهنمایی نیست).
ب) شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$ را به دست آورید.