

(1) مبدل لاپلاس را برای هر یک از توابع زیر بیابید. (n عدد صحیح مثبت و a عدد حقیقی ثابت)

الف) t

ب) t^2

ج) t^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$)

د) $t^n e^{at}$

(2) ابتدا برای تابع $f(t) = \cos bt$ ، مبدل لاپلاس را بیابید. سپس با یادآوری رابطه $\cos bt = \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}$ ، مبدل لاپلاس را برای تابع $g(t) = e^{at} \cos bt$ بیابید. a و b ثابت های حقیقی هستند.

(3) در هر یک از مسائل زیر، تبدیل معکوس لاپلاس تابع داده شده را بیابید.

الف) $\frac{2s+2}{s^2+2s+5}$

ب) $\frac{2s-3}{s^2-4}$

ج) $\frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$

(4) هر یک از معادلات مقدار اولیه داده شده زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

الف) $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

ب) $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

ج) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

د) $y^{(4)} - 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$

ه) $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < \infty; \end{cases}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(5) فرض کنید که برای $s > a \geq 0$ ، $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ موجود است :

الف) نشان دهید که اگر c ثابت مثبت باشد، آنگاه

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad s > ca$$

ب) نشان دهید که اگر k ثابت مثبت باشد، در آن صورت

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$$

ج) نشان دهید که اگر a و b ثابت باشند و $a > 0$ ، آنگاه

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as + b)\} = \frac{1}{a} e^{-\frac{bt}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right)$$

(6) در هر یک از موارد زیر تبدیل لاپلاس تابع داده شده را بیابید.

الف) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$

ب) $f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < 1 \\ 0 & , 1 \leq t < 2 \\ 1 & , 2 \leq t < 3 \\ 0 & , t \geq 3 \end{cases}$

(7) اگر f برای تمام مقادیر $t \geq 0$ و عدد مثبتی چون T ، در $f(t+T) = f(t)$ صدق کند، به تابع f متناوب با دوره تناوب T در بازه $0 \leq t < \infty$ گفته می‌شود. نشان دهید

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-sT} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

(8) با کمک نتیجه مساله قبل تبدیل لاپلاس تابع داده شده را حساب کنید .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$$f(t+2) = f(t)$$

(9) به کمک رابطه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس ، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(t) = t^2 \sin 3t$

ب) $f(t) = te^{-2t} \sin 3t$

(10) به کمک رابطه انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس ، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(t) = \frac{\sin^2(t)}{t}$

ب) $I(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$

" موفق باشید "