

به نام خدا

مخصوص کلاس حل تمرین

تمارین سری نهم درس معادلات

1) دستگاه  $tx' = Ax$  نظیر معادله مرتبه دوم اویلر است. فرض کنید که  $x = \xi t^r$ ، که در آن  $\xi$  برداری است ثابت. الف) نشان دهید که برای به دست آوردن جوابهای معادله دیفرانسیل داده شده، باید  $\xi$  و  $r$  در معادله زیر صدق کنند:

$$(A - rI)\xi = 0$$

ب) با توجه به قسمت قبل دستگاه معادلات داده شده را حل کنید. ( $t > 0$ )

$$tx' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x$$

2) در هر مورد، ماتریس اساسی دستگاه معادلات داده شده را بیابید. همچنین ماتریس اساسی  $\phi(t)$  را نیز که در  $\phi(0) = I$  صدق می کند، به دست آورید.

الف)  $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$

ب)  $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$

3) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را با روش ضرایب نامعین بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

4) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را با روش تغییر پارامتر بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

(5) جواب عمومی دستگاه معادلات داده شده را با روش قطری سازی بیابید.

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x + e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6) الف) نشان دهید که  $r=1$  ریشه سه گانه معادله مشخصه دستگاه زیر میباشد و تنها دو بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد.

$$x' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} x$$

ب) برای دستگاه فوق دو جواب مستقل خطی  $x^1(t)$  و  $x^2(t)$  را بیابید.

ج) برای تعیین جواب سوم فرض کنید که  $x^3(t) = \xi t e^t + \eta e^t$  و نشان دهید که  $\xi$  و  $\eta$  باید در معادلات زیر صدق کنند:

$$(A-I) \xi = 0$$

$$(A-I) \eta = \xi$$

د) نشان دهید که  $\xi = c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}$  که در آن  $\xi^{(1)}$  و  $\xi^{(2)}$  بردار ویژه‌های مستقل خطی و  $c_1$  و  $c_2$  ثابت‌های دلخواهند، کلی‌ترین جواب معادله  $(A-I) \xi = 0$  است. نشان دهید که برای حل معادله  $(A-I) \eta = \xi$  لازم است که  $c_1 = c_2$ .

ه) بهتر است که  $c_1$  و  $c_2$  را مساوی 2 بگیریم. برای این انتخاب نشان دهید که

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

که در آن  $k_1$  و  $k_2$  ثابت‌های دلخواهند. با استفاده از نتایج حاصل از معادلات فوق یک جواب مستقل خطی سوم  $x^3(t)$  را از دستگاه نخست بیابید.

" با آرزوی موفقیت "